UNIVERSITÉ DE LAUSANNE
Ecole des Hautes Etudes Commerciales

LES MÉTHODES PRINCIPALES DE CALCUL PAR GROUPES DES RÉSERVES MATHÉMATIQUES DANS L'ASSURANCE ET LEURS MÉTHODES DÉRIVÉES

THÈSE

présentée à l'Ecole des Hautes Etudes Commerciales de l'Université de Lausanne pour l'obtention du grade de Docteur ès sciences commerciales et actuarielles

par

YUSUF KENAN URAL
licencié ès sciences commerciales et actuarielles

Berne
Imprimerie Stæmpfli & Cie
1960

LES MÉTHODES PRINCIPALES DE CALCUL PAR GROUPES DES RÉSERVES MATHÉMATIQUES DANS L'ASSURANCE ET LEURS MÉTHODES DÉRIVÉES

UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

LES MÉTHODES PRINCIPALES DE CALCUL PAR GROUPES DES RÉSERVES MATHÉMATIQUES DANS L'ASSURANCE ET LEURS MÉTHODES DÉRIVÉES

THÈSE

présentée à l'Ecole des Hautes Etudes Commerciales de l'Université de Lausanne pour l'obtention du grade de Docteur ès sciences commerciales et actuarielles

par

YUSUF KENAN URAL

licencié ès sciences commerciales et actuarielles

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Berne

Imprimerie Stæmpfli & Cie

1960

UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

IMPRIMATUR

Le Conseil de l'Ecole des Hautes Etudes Commerciales de l'Université de Lausanne, sans se prononcer sur les opinions de l'auteur, autorise l'impression de la thèse présentée par M. Yusuf Kenan URAL, en vue de l'obtention du doctorat ès sciences commerciales et actuarielles.

Sujet de la thèse : «Les méthodes principales de calcul par groupes des réserves mathématiques dans l'assurance et leurs méthodes dérivées».

Lausanne, le 2 juillet 1959.

Le Directeur :

Jules CHUARD

A la mémoire de mon père

Qu'il nous soit permis d'exprimer ici notre vive gratitude à M. le professeur Auguste Urech pour les précieux conseils qu'il nous a prodigués et pour l'extrême bienveillance qu'il n'a cessé de nous témoigner au cours de l'élaboration de ce travail.

INTRODUCTION

Toute compagnie d'assurances sur la vie calcule chaque année les réserves mathématiques de son portefeuille afin d'établir le bilan exigé par la loi et les autorités de surveillance.

L'inventaire de l'exercice se fait généralement à la fin de l'année, le 31 décembre. L'année d'assurance relative à un contrat ne coïncide en général pas avec l'année comptable. Il va sans dire que, pour le bilan, il s'agit de calculer les réserves mathématiques à la fin de l'année comptable. Elles se déduisent aisément de celles qu'on détermine, individuellement ou par groupes, pour tous les contrats à la fin de l'année d'assurance respective.

Le calcul des réserves, contrat par contrat, représente un travail considérable pour un portefeuille qui contient des milliers de polices. Pour le simplifier, on a essayé de grouper les contrats présentant certains points communs et de faire le calcul comme s'il ne s'agissait que d'un seul contrat. De nombreuses méthodes ont été imaginées en vue d'arriver à des résultats satisfaisants. Quant à nous, partant des formules prospective et rétrospective de calcul des réserves mathématiques, nous établirons une correspondance entre la période d'assurance future et celle qui est passée. Puis, à l'aide de cette correspondance, nous pourrons déduire de toute méthode connue de groupement une nouvelle méthode que nous appellerons «méthode dérivée». Les nouvelles méthodes obtenues pour l'assurance sur la vie seront alors étendues à l'assurance en cas d'invalidité et à l'assurance de survivants. Notre étude se bornera aux formes les plus courantes de ces assurances.

Nous avons eu recours, tout au long de notre travail, à la méthode discontinue; la méthode continue ne soulèverait aucun problème nouveau.

Nous n'avons pas abordé la question des assurances sur plusieurs têtes, si ce n'est occasionnellement, ces assurances étant trop peu nombreuses pour justifier le calcul des réserves mathématiques par groupes.

Quelques difficultés d'ordres divers se présentent dans le calcul par groupes des réserves mathématiques. Il ne faut omettre aucune police en cours et n'en maintenir aucune qui, en réalité, a disparu. Les polices à clauses spéciales nécessitent des calculs à part. Si la prime pure n'est pas calculée et qu'on introduit à sa place une prime pure approximative égale à la prime brute diminuée d'une quantité estimée, on court le risque d'obtenir des réserves trop faibles ou même négatives. Quand on fait une évaluation des réserves mathématiques par groupes, il faut, au préalable, déceler les valeurs négatives et les éliminer en les remplaçant par des réserves nulles.

PREMIÈRE PARTIE

DÉFINITION DE LA CORRESPONDANCE «PROSPECTIF-RÉTROSPECTIF»

I. La notion de la réserve mathématique

1° Définition générale

Considérons un grand nombre d'assurances identiques de n'importe quelle nature (vie, maladie, invalidité, etc.) souscrites au moment $t = 0$ par un groupe homogène de l_x personnes d'âge x, pour une durée de n années. Désignons par $A(0)$ la valeur actuelle au moment $t = 0$ des prestations futures probables de l'assureur et par $\Pi(0)$ la valeur actuelle au même moment des primes que payeront les assurés sur la base du taux technique d'intérêt choisi ainsi que des tables de mortalité, de morbidité, d'invalidité, etc. D'après le principe de l'équivalence des prestations et des contre-prestations, on a en faisant abstraction des frais:

$$\Pi(0) = A(0). \tag{1}$$

Si nous nous plaçons à un moment t quelconque, compris entre 0 et n, on peut considérer séparément:

d'une part, les prestations ou contre-prestations échues dans le passé, jusqu'au moment t, t y compris, que nous désignerons respectivement par $A'(t)$ et par $\Pi'(t)$,

d'autre part, les prestations et les contre-prestations qui seront payées après ce moment, que nous désignerons respectivement par $A''(t)$ et $\Pi''(t)$.

Si $A(t)$ désigne la valeur actuelle au moment t de toutes les prestations de l'assureur et $\Pi(t)$ celle de toutes les contre-prestations, on a:

$$A(t) = A'(t) + A''(t) \tag{2}$$

et

$$\Pi(t) = \Pi'(t) + \Pi''(t). \tag{3}$$

Du reste, on a $\Pi(t) = (1+i)^t \Pi(0)$ et $A(t) = (1+i)^t A(0)$, d'où la relation

$$\Pi(t) = A(t), \tag{1'}$$

qui exprime que le principe de l'équivalence des prestations et contre-prestations, postulé pour le moment $t = 0$, est aussi valable à tout

moment t. Nos formules ont d'ailleurs un sens et sont satisfaites pour toute valeur positive ou négative de t. Quel que soit t, on a:

$$\Pi'(t) + \Pi''(t) = A'(t) + A''(t), \tag{4}$$

ou bien:

$$\Pi'(t) - A'(t) = A''(t) - \Pi''(t). \tag{5}$$

La différence $\Pi'(t) - A'(t)$ entre la valeur finale, au moment t, des primes encaissées jusqu'à ce moment et la valeur des prestations versées, est positive ou négative; rien n'autorise à admettre qu'elle est nulle. Admettons par exemple que cette différence est positive, c'est-à-dire que:

$$\Pi'(t) - A'(t) > 0.$$

Alors on a aussi:

$$A''(t) - \Pi''(t) > 0.$$

La première différence n'est pas un bénéfice de l'assureur, lors même que la valeur actuelle des primes encaissées dépasse la valeur actuelle des prestations payées. Son montant ne peut pas être réparti aux actionnaires ou aux sociétaires; il doit être mis en réserve puisque, suivant la deuxième inégalité, la valeur actuelle des prestations futures dépassera exactement du même montant la valeur actuelle des primes futures à encaisser.

Si la première différence était négative, il en serait de même de la deuxième; nos considérations demeureraient valables, il suffirait d'adapter le texte à la nouvelle situation.

Par définition, nous appellerons réserve mathématique du portefeuille ou du groupe considéré, l'une ou l'autre des différences de l'égalité (5). Deux méthodes se présentent ainsi pour le calcul de la réserve mathématique. La méthode rétrospective fondée sur les opérations du passé, conduit à la formule:

$$R'(t) = \Pi'(t) - A'(t). \tag{6}$$

Nous désignerons $R'(t)$ par l'expression «réserve mathématique rétrospective du groupe $l(t)$».

La méthode prospective, elle, fait intervenir les opérations futures; la «réserve mathématique prospective du groupe $l(t)$» est donnée par la formule:

$$R''(t) = A''(t) - \Pi''(t). \tag{7}$$

La relation (5) montre que ces deux réserves sont égales:

$$R'(t) = R''(t). \tag{5'}$$

Nous avons là une démonstration tout à fait générale de l'égalité des réserves mathématiques rétrospective et prospective d'un portefeuille,

démonstration valable pour toutes les branches, pour toutes les formes d'assurances et tous les modes de paiement de la prime. Cette égalité postule du reste l'utilisation des mêmes bases techniques, taux d'intérêt, tables de mortalité, de morbidité, d'invalidité, etc., pendant les années que dure le portefeuille, comme nous l'avons implicitement admis ci-dessus.

Il s'agissait jusqu'ici de la réserve mathématique du groupe d'assurés $l(t)$. Nous définirons maintenant la réserve mathématique individuelle d'une assurance du portefeuille $l(t)$, en cours au moment t, comme étant le quotient de la réserve mathématique du portefeuille par le nombre des assurances qui le composent. De même que ci-dessus, on a une réserve mathématique individuelle rétrospective et une réserve individuelle prospective, les deux étant égales entre elles:

$$ {}_tV_x^{\text{rétr.}} = \frac{\Pi'(t) - A'(t)}{l(t)}, \tag{8} $$

$$ {}_tV_x^{\text{pr.}} = \frac{A''(t) - \Pi'(t)}{l(t)} \tag{9} $$

et

$$ {}_tV_x^{\text{rétr.}} = {}_tV_x^{\text{pr.}}. \tag{10} $$

2° La formule prospective de la réserve mathématique

La réserve mathématique individuelle prospective peut s'écrire:

$$ {}_tV_x^{\text{pr.}} = \frac{A''(t)}{l(t)} - \frac{\Pi''(t)}{l(t)}. $$

Le premier terme du second membre est la valeur actuelle moyenne par assuré, au moment t, des engagements futurs de l'assureur, qu'on peut désigner d'une manière générale par le symbole ${}_tA$. Le deuxième terme est la valeur actuelle moyenne, au moment t, des primes futures de l'assuré, soit $P\,{}_t\ddot{a}$ s'il s'agit d'une prime annuelle constante P payable pendant m années, tant que $t < m$, ${}_t\ddot{a}$ désignant la rente temporaire $\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}$. Le symbole ${}_t\ddot{a}$ peut du reste aussi désigner, le cas échéant, une rente sur plusieurs têtes. Nous écrirons:

$$ {}_tV_x^{\text{pr.}} = {}_tA - P\,{}_t\ddot{a}, \tag{11} $$

formule qui s'applique à toutes les branches et à toutes les formes d'assurances. On peut en tirer des formules particulières à certaines formes d'assurances, par exemple à l'assurance mixte.

3° La formule rétrospective de la réserve mathématique

Partant de la réserve mathématique d'un groupe d'assurés, on peut écrire:

$$ {}_tV_x^{\text{rétr.}} = \frac{\Pi'(t)}{l(t)} - \frac{A'(t)}{l(t)}. $$

Par définition, $\frac{\Pi'(t)}{l(t)}$ est la moyenne, par assuré vivant, de la valeur actuelle au moment t (valeur finale) des primes payées par les assurés du groupe, du moment $t = 0$ au moment t. En désignant par P la prime constante annuelle que verse l'assuré, cette moyenne peut s'écrire:

$$ P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|}, \quad \text{tant que } t \leqq m $$

où $\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ désigne la valeur finale d'une rente viagère de 1 payable par anticipation, du moment $t = 0$ jusqu'au décès, au plus tard jusqu'au moment t.

De même, $\frac{A'(t)}{l(t)}$ est la moyenne par assuré, au moment t, des prestations versées par l'assureur au groupe, du moment $t = 0$ au moment t. Nous désignerons cette moyenne par le symbole ${}_{|t}S_x$, qui n'est du reste pas un symbole de la notation actuarielle internationale. ${}_{|t}S_x$ est la valeur finale du risque, suivant l'expression introduite par M. Jéquier, professeur à l'Université de Lausanne, sous la désignation $r_{x:\overline{t}|}$ («De la capitalisation viagère», pages 29 et 43). Pour la rente $\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$, nous utiliserons aussi l'appellation expressive de M. Jéquier: «facteur de capitalisation viagère».

Nous pouvons donc écrire d'une manière tout à fait générale la réserve mathématique rétrospective sous la forme:

$$ {}_tV_x^{\text{rétr.}} = P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|} - {}_{|t}S_x. \tag{12} $$

On peut en tirer des formules particulières pour certaines formes d'assurances, par exemple pour l'assurance mixte.

Ces deux formules des réserves mathématiques sont applicables à toutes les combinaisons d'assurances; elles sont tout à fait générales [1]).

---

[1]) Cette démonstration est donnée par M. le professeur A. Urech dans ses cours à l'Université de Lausanne.

II. Correspondance «prospectif-rétrospectif» déduite des formules prospective et rétrospective

1° Définition de la correspondance

Considérons une assurance quelconque conclue à l'âge x, pour une durée de n années et plaçons-nous t années plus tard, au moment t. Etant donnés une table de mortalité et un taux d'intérêt, la réserve mathématique peut être calculée ou bien par la formule prospective:

$$ {}_tV_x^{\text{pr.}} = {}_tA - P\,{}_t\ddot{a}, $$

ou bien par la formule rétrospective:

$$ {}_tV_x^{\text{rétr.}} = P\,\bar{s}_{x:\overline{t}|} - {}_tS_x. $$

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, si la table de mortalité et le taux d'intérêt utilisés sont les mêmes dans les deux cas, les valeurs obtenues au moyen de ces deux formules sont égales.

Les deux méthodes de calcul, prospective et rétrospective, vont nous permettre d'établir une correspondance entre la période d'assurance qui, à partir du moment t, s'étend à l'avenir et celle qui, à partir du moment t, remonte vers le passé. A des éléments de la première période correspondront des éléments de la seconde, et inversément.

Le moment t où l'on établit l'inventaire se correspond à lui-même; l'assuré est alors âgé de $x' = x + t$. A l'échéance $x + n = s$, nous faisons correspondre le moment de l'entrée dans l'assurance, c'est-à-dire celui où l'assuré est âgé de x. A la période future d'assurance, qui s'étend de $x + t$ à $x + n$, nous faisons correspondre la période passée qui remonte de $x + t$ jusqu'à x, de sorte qu'à l'échéance $s = x + n$ correspond le moment x où l'assurance a été conclue, et inversément.

A l'ensemble des primes futures escomptées viagèrement jusqu'au moment t, nous faisons correspondre la valeur capitalisée viagèrement des primes déjà payées jusqu'à ce même moment. A la valeur actuelle, au moment t, des prestations que l'assureur paiera à partir de ce moment, nous faisons correspondre la valeur finale des prestations qu'il a versées auparavant.

A la réserve mathématique prospective calculée à l'âge $x + t$ correspondra la réserve mathématique rétrospective, et réciproquement.

C'est donc une correspondance assez spéciale que nous envisageons ainsi pour toute police en vigueur au moment t. Ce n'est pas une correspondance point par point, mais une correspondance entre deux périodes de chaque assurance d'un portefeuille, qui dépend essentiellement du moment t où l'on est arrivé. Elle est surtout utile lorsqu'on considère des groupes de polices.

La correspondance n'est pas encore définie en dehors de la période d'assurance x à $x+n$. Nous nous réservons de le faire par la suite.

Si nous reprenons les formules prospective et rétrospective de la réserve mathématique, à l'élément ${}_tA$ de la première correspond ${}_tS_x$ de la seconde et à la valeur actuelle $P\,{}_t\ddot{a}$ correspond la valeur finale $P\,s_{x:\overline{t}|}$, et inversément. De même à la réserve mathématique prospective ${}_tV_x^{\text{pr.}}$ correspond la réserve rétrospective ${}_tV_x^{\text{rétr.}}$, qui lui est du reste égale dans les conditions que nous envisageons ici.

Dès lors, en se plaçant au moment t, à tout calcul par la méthode prospective correspondra un calcul bien déterminé de la méthode rétrospective, et inversément.

Si donc nous considérons un portefeuille d'assurances à un moment donné t, pour chaque assurance, il existe ainsi une correspondance entre l'avenir et le passé, que nous désignerons dans la suite par le terme: correspondance «prospectif-rétrospectif» ou simplement par $P \rightarrow R$. A une méthode de groupement utilisant la formule prospective, il doit ainsi être possible de faire correspondre une autre méthode fondée sur la méthode rétrospective, et inversément.

Nous nous proposons dans la suite d'examiner quelques méthodes de groupement connues et de chercher les méthodes correspondantes au sens de notre définition. Il est possible que cela nous permette de trouver des méthodes nouvelles; il est possible aussi qu'on s'aperçoive que deux méthodes déjà connues sont liées entre elles par la correspondance définie ci-dessus. Une propriété établie pour l'une des méthodes aura sa parallèle dans l'autre, car il est clair qu'une propriété fondée sur la formule prospective aura pour correspondante une propriété fondée sur la méthode rétrospective et inversément. Nous pouvons espérer que cette façon de procéder portera quelques fruits. Elle permettra aussi de ranger les méthodes de groupement des réserves mathématiques en deux classes et de mieux comprendre certaines de leurs propriétés.

Etant donnée une méthode de groupement des réserves mathématiques, nous conviendrons d'appeler «méthode dérivée» de la première, celle que nous obtiendrons par l'application du principe ci-dessus. Cette appellation nous paraît tout à fait acceptable, puisque la méthode en question est déduite d'une méthode déjà connue au moyen de la correspondance que nous avons définie.

2° Etude de quelques éléments correspondants. Exemples numériques

Examinons d'abord la nature des éléments correspondants $P\,{}_t\ddot{a}$ et $P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$, ${}_tA$ et ${}_tS_x$ des formules prospective et rétrospective dans le cas de l'assurance mixte et leur variation lorsque le temps écoulé t augmente de 0 à n.

La valeur actuelle, au moment t, de la rente temporaire $\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ est une somme des capitaux différés:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} &= 1 + v\,p_{x+t} + v^2\,{}_2p_{x+t} + \ldots + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_{x+t}, \\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} &= \sum_{\tau=0}^{\tau=n-t-1} v^\tau\,{}_\tau p_{x+t} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n-t-1} \frac{D_{x+t+\tau}}{D_{x+t}}. \end{aligned} \tag{13}$$

La valeur actuelle, à ce même moment t, des rentes payées dans le passé $\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ est une somme de facteurs de capitalisation viagère:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{x:\overline{t}|} &= {}_tI_x + {}_{t-1}I_{x+1} + {}_{t-2}I_{x+2} + \ldots + {}_1I_{x+t-1}, \\ \ddot{s}_{x:\overline{t}|} &= \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} {}_{t-\tau}I_{x+\tau} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \frac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Ces deux éléments dépendent essentiellement de t et, en général, assez peu de l'âge x. Pour une assurance donnée, si t augmente depuis 0 et tend vers la durée d'assurance n, $P\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ est en général une fonction décroissante; par contre, $P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ est en général une fonction croissante. Les exemples numériques donnés ci-dessous illustreront cette remarque.

Des deux autres éléments ${}_tA$ et ${}_tS_x$, nous pouvons dire que, si nous nous plaçons dans le cas de l'assurance mixte, la valeur actuelle du capital unitaire assuré $A_{x+t:\overline{n-t}|}$ est la somme des valeurs actuelles de l'assurance temporaire au décès et du capital différé:

$$A_{x+t:\overline{n-t}|} = A^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} + {}_{n-t}E_{x+t} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n-t-1} v^{\tau+1}\,{}_\tau|q_{x+t} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}. \tag{15}$$

La valeur actuelle, au moment t, du risque ${}_tS_x$ est la somme des risques périodiques de décès de l'assuré pendant t années:

$$ {}_tS_x = \frac{D_x}{D_{x+t}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} v^{\tau+1} {}_{\tau|}q_x. \qquad (16) $$

Ces deux derniers éléments correspondants dépendent également de t essentiellement. Pour une assurance mixte, au fur et à mesure que t augmente, $A_{x+t:\overline{n-t}|}$ et ${}_tS_x$ croissent en général.

Dans les tableaux ci-dessous, nous donnons pour deux assurances mixtes, les valeurs des éléments prospectif et rétrospectif en fonction de la durée écoulée t, calculées selon la table SM 1948/53 à 2½ %.

Age d'entrée = 25 ans
Durée = 15 ans
Age-terme = 40 ans

	Eléments correspondants			Eléments correspondants			Réserves mathématiques	
t	$P\ddot{a}_{25+t:\overline{15-t}\|}$	$P\ddot{s}_{25:\overline{t}\|}$	total	$A_{25+t:\overline{15-t}\|}$	${}_tS_{25}$	total	${}_tV^{\text{rétr.}}_{25:\overline{15}\|}$	${}_tV^{\text{pr.}}_{25:\overline{15}\|}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0,69455	0	0,69455	0,69455	0	0,69455	0	0
1	0,65633	0,05696	0,71329	0,71137	0,00192	0,71329	0,05504	0,05504
2	0,61708	0,11546	0,73254	0,72863	0,00391	0,73254	0,11155	0,11155
3	0,57677	0,17554	0,75231	0,74634	0,00597	0,75231	0,16957	0,16957
4	0,53540	0,23726	0,77266	0,76456	0,00810	0,77266	0,22916	0,22916
5	0,49291	0,30064	0,79355	0,78324	0,01031	0,79355	0,29033	0,29033
6	0,44930	0,36574	0,81504	0,80242	0,01262	0,81504	0,35312	0,35312
7	0,40451	0,43264	0,83715	0,82213	0,01502	0,83715	0,41762	0,41762
8	0,35852	0,50135	0,85987	0,84233	0,01754	0,85987	0,48381	0,48381
9	0,31131	0,57199	0,88330	0,86311	0,02019	0,88330	0,55180	0,55180
10	0,26283	0,64460	0,90743	0,88444	0,02299	0,90743	0,62161	0,62161
11	0,21305	0,71927	0,93232	0,90630	0,02602	0,93232	0,69325	0,69325
12	0,16193	0,79612	0,95805	0,92879	0,02926	0,95805	0,76686	0,76686
13	0,10942	0,87522	0,98464	0,95190	0,03274	0,98464	0,84248	0,84248
14	0,05547	0,95668	1,01215	0,97563	0,03652	1,01215	0,92016	0,92016
15	0	1,04064	1,04064	0	1,04064	1,04064	0	0

Age d'entrée = 30 ans
Durée = 20 ans
Age-terme = 50 ans

	Eléments correspondants			Eléments correspondants			Réserves mathématiques	
t	$P\ddot{a}_{30+t:\overline{20-t}\rceil}$	$P\ddot{s}_{30:\overline{t}\rceil}$	total	$A_{30+t:\overline{20-t}\rceil}$	${}_tS_{30}$	total	${}_tV^{\text{rétr.}}_{30:\overline{20}\rceil}$	${}_tV^{\text{pr.}}_{30:20\rceil}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0,61929	0	0,61929	0,61929	0	0,61929	0	0
1	0,59530	0,04075	0,63605	0,63402	0,00203	0,63605	0,03872	0,03872
2	0,57069	0,08261	0,65330	0,64916	0,00414	0,65330	0,07847	0,07847
3	0,54543	0,12561	0,67104	0,66468	0,00636	0,67104	0,11925	0,11925
4	0,51953	0,16980	0,68933	0,68062	0,00871	0,68933	0,16109	0,16109
5	0,49296	0,21520	0,70816	0,69696	0,01120	0,70816	0,20400	0,20400
6	0,46572	0,26187	0,72759	0,71369	0,01390	0,72759	0,24797	0,24797
7	0,43779	0,30987	0,74766	0,73086	0,01680	0,74766	0,29307	0,29307
8	0,40917	0,35925	0,76842	0,74848	0,01994	0,76842	0,33931	0,33931
9	0,37981	0,41007	0,78988	0,76652	0,02336	0,78988	0,38671	0,38671
10	0,34970	0,46242	0,81212	0,78501	0,02711	0,81212	0,43531	0,43531
11	0,31883	0,51635	0,83518	0,80400	0,03118	0,83518	0,48517	0,48517
12	0,28715	0,57196	0,85911	0,82348	0,03563	0,85911	0,53633	0,53633
13	0,25463	0,62933	0,88396	0,84348	0,04048	0,88396	0,58885	0,58885
14	0,22123	0,68857	0,90980	0,86398	0,04582	0,90980	0,64275	0,64275
15	0,18694	0,74985	0,93679	0,88508	0,05171	0,93679	0,69814	0,69814
16	0,15169	0,81329	0,96498	0,90674	0,05824	0,96498	0,75505	0,75505
17	0,11545	0,87912	0,99457	0,92904	0,06553	0,99457	0,81359	0,81359
18	0,07813	0,94750	1,02563	0,95197	0,07366	1,02563	0,87384	0,87384
19	0,03968	1,01861	1,05829	0,97558	0,08271	1,05829	0,93590	0,93590
20	0	1,09285	1,09285	0	1,09285	1,09285	0	0

Le total $P\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil} + P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}\rceil}$ des colonnes (2) et (3) n'est pas autre chose que la valeur actuelle, au moment t, de toutes les primes dues, soit: $\dfrac{D_x}{D_{x+t}}\,A_{x:\overline{n}\rceil} = \dfrac{(1+i)^t}{{}_tp_x}\,A_{x:\overline{n}\rceil} = {}_tI_x\,A_{x:\overline{n}\rceil}$ colonne (4).

C'est la valeur finale, après t années, de la prime unique, calculée à l'aide du facteur de capitalisation viagère ${}_tI_x$ selon SM 1948/53 à 2½%.

De même, la somme des éléments correspondants $A_{x+t:\overline{n-t}}$ et ${}_tS_x$ des colonnes (5) et (6) est la valeur actuelle, au moment t, de toutes les prestations dues par l'assureur (colonne 7), soit le même montant que ci-dessus en vertu du principe de l'équivalence des prestations et contre-prestations, ce qu'on vérifie dans les tableaux numériques.

Si nous formons d'abord la différence des colonnes (3) et (6):

$$P\bar{s}_{x:\overline{t}} - {}_tS_x,$$

et puis celle des colonnes (5) et (2):

$$A_{x+t:\overline{n-t}} - P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}},$$

ou d'une façon générale:

$${}_tA - P\,{}_t\ddot{a},$$

nous trouvons, d'une part, la réserve mathématique rétrospective (colonne 8) et, d'autre part, la réserve mathématique prospective (colonne 9). On vérifie qu'elles sont égales dans nos tableaux.

DEUXIÈME PARTIE

RECHERCHE DES MÉTHODES DÉRIVÉES ET LEURS APPLICATIONS À L'ASSURANCE SUR LA VIE

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier brièvement les méthodes les plus importantes de groupement, et d'essayer, par la suite, de trouver la méthode dérivée de chacune d'elles. Dans la première partie, nous avons défini la correspondance «prospectif-rétrospectif» et nous avons dit qu'à chaque méthode connue correspond une méthode dérivée découlant de la méthode initiale.

En vue de mettre en évidence la correspondance définie, nous n'exposerons que l'essentiel des méthodes de départ, sans nous arrêter aux détails que le lecteur peut trouver facilement dans de nombreux ouvrages. Toutefois, nous montrerons leur application aux combinaisons d'assurances les plus usuelles, application qu'il est moins aisé de trouver ailleurs.

Les méthodes de groupement qui offrent le plus d'intérêt et qui feront l'objet du présent chapitre, chacune avec sa méthode dérivée, sont les suivantes:

I. La méthode d'Altenburger
II. La méthode de Whiting
III. La méthode de Lidstone
IV. La méthode «*t*»
V. La méthode de Fouret.

Au cours de l'étude de ces méthodes, nous utiliserons la notation actuarielle internationale ou éventuellement d'autres symboles, lorsque cela sera nécessaire.

Nous désignerons par x l'âge de l'assuré à la souscription, par $x' = x + t$ l'âge à l'inventaire, par n la durée de l'assurance, par P la prime annuelle pure constante pour un capital C et par t la durée écoulée au moment de l'inventaire. Lorsqu'il nous faudra distinguer les primes annuelles des différentes combinaisons, nous utiliserons la lettre P avec les indices convenables.

Chapitre I

Recherche de la méthode dérivée de la méthode d'Altenburger

I. La méthode d'Altenburger

Cette méthode, dite aussi «Méthode des nombres auxiliaires», a été imaginée par MM. Karup et Altenburger, respectivement actuaires allemand et autrichien. Son grand avantage est qu'elle permet de réunir tous les contrats de même âge à l'inventaire en un seul groupe, quelle que soit la durée restant à courir jusqu'au terme ou jusqu'à l'échéance de la dernière prime. Le groupe ne dépend donc que d'un seul paramètre: l'âge atteint au moment de l'inventaire ou bien l'année de naissance. Pour éliminer de la formule de la réserve mathématique la durée restant à courir, on introduit des nombres auxiliaires qu'on calcule une fois pour toutes, au début de l'assurance; on les inscrit sur les cartes techniques comme les autres éléments des polices pour s'en servir à chaque inventaire.

Nous ferons l'exposé de la méthode pour les principales combinaisons d'assurances, sur primes pures et sur primes d'inventaire. Enfin, nous nous efforcerons de trouver la méthode dérivée, dont nous étendrons l'étude aux mêmes combinaisons d'assurances.

Nous tenons à rappeler que la méthode d'Altenburger est basée sur la formule prospective des réserves mathématiques.

1° Assurances mixtes

Si la prime annuelle est constante et payable pendant m années, m étant inférieur ou égal à n, la réserve mathématique individuelle de l'assurance mixte, transformée en vue du calcul des réserves d'un groupe par la méthode d'Altenburger, s'écrit:

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|} = CA_{x'} - P\ddot{a}_{x'} + \frac{1}{D_{x'}}(PN_{x+m} + CD_{x+n} - CM_{x+n}). \quad (17) $$

Dans cette formule, l'expression $(PN_{x+m} + CD_{x+n} - CM_{x+n})$ est indépendante de la durée écoulée t. C'est le coefficient d'Altenburger que l'on peut écrire simplement:

$$ K = (PN_{x+m} + CdN_{x+n}), \quad \text{où } d = 1 - v. \quad (18) $$

On le calcule au début de l'assurance et on l'inscrit sur les cartes techniques. Pour un groupe de contrats de même âge x' à l'inventaire, le montant total des réserves mathématiques, au moment t, s'écrit:

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x'} \sum C - \ddot{a}_{x'} \sum P + \frac{1}{D_{x'}} \sum K. \qquad (19)$$

A un inventaire quelconque, pour calculer les réserves mathématiques, on voit d'après la formule que l'essentiel est de connaître les valeurs $A_{x'}$, $\ddot{a}_{x'}$ et $D_{x'}$ et de faire la somme des capitaux ainsi que la somme des primes et celle des coefficients d'Altenburger. La suite du travail est très facile à effectuer.

Ce qui caractérise la formule (19), c'est le groupement des contrats d'après l'âge à l'inventaire ou l'année de naissance. Tout se passe comme si chaque contrat du groupe était remplacé par une assurance vie-entière ayant pour réserve mathématique l'expression formée par les deux premiers termes de droite de la formule (17), cette réserve étant ensuite ramenée à la réserve de l'assurance mixte au moyen du troisième terme qui dépend du coefficient d'Altenburger.

La méthode d'Altenburger est l'une des méthodes exactes qui retiendront notre attention.

2° Assurances vie-entière

L'assurance vie-entière est un cas particulier de l'assurance mixte, dans laquelle la durée n est égale à $\omega + 1 - x$, ω étant le dernier âge contenu dans la table de mortalité. La méthode d'Altenburger est applicable, puisque les nombres de commutation D_{x+n} et M_{x+n} sont nuls, le coefficient d'Altenburger se réduit à:

$$K = P N_{x+m}.$$

Pour un groupe de polices, nous aurons donc:

$$\sum C\,{}_tV_x = A_{x'} \sum C - \ddot{a}_{x'} \sum P + \frac{1}{D_{x'}} \sum K. \qquad (20)$$

Si la prime est viagère, le coefficient d'Altenburger K est lui-même nul et la structure de la formule usuelle de la réserve mathématique

$$C\,{}_tV_x = C A_{x'} - P \ddot{a}_{x'}$$

est déjà celle qui convient au calcul des réserves par groupes au moyen

de la méthode d'Altenburger. Il n'y a là rien de surprenant, puisque la méthode d'Altenburger consiste précisément à remplacer toute assurance mixte par une assurance vie-entière à prime viagère, le terme avec le coefficient d'Altenburger ayant pour fonction de ramener la réserve de l'assurance vie-entière auxiliaire à celle de l'assurance mixte primitive.

3° Assurances temporaires au décès

La formule de la réserve mathématique ne diffère de celle de l'assurance mixte que par l'absence du terme D_{x+n} au numérateur de la fraction relative aux nombres auxiliaires, compte tenu de la prime de la nouvelle assurance:

$$_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = CA_{x'} - P\ddot{a}_{x'} + \frac{1}{D_{x'}}(PN_{x+m} - CM_{x+n}) \quad \text{pour } t < m. \quad (21)$$

Le coefficient d'Altenburger est $K = (PN_{x+m} - CM_{x+n})$.

Pour un groupe d'assurés, nous aurons:

$$\underline{\Sigma}\, {}_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = A_{x'} \underline{\Sigma}\, C - \ddot{a}_{x'} \underline{\Sigma}\, P + \frac{1}{D_{x'}} \underline{\Sigma}\, K. \quad (22)$$

4° Assurances de capitaux différés

a) sans contre-assurance:

Nous écrivons la réserve mathématique pour la méthode d'Altenburger de la manière suivante:

$$_tV_{x\,(n}E_x) = -P\ddot{a}_{x'} + \frac{1}{D_{x'}}(PN_{x+n} + CD_{x+n}). \quad (23)$$

Le coefficient d'Altenburger est $K = (PN_{x+n} + CD_{x+n})$.

Pour un groupe d'assurés, nous aurons:

$$\underline{\Sigma}\, {}_tV_{x\,(n}E_x) = -\ddot{a}_{x'} \underline{\Sigma}\, P + \frac{1}{D_{x'}} \underline{\Sigma}\, K. \quad (24)$$

b) avec contre-assurance:

Dans la pratique, le capital différé avec contre-assurance des primes a la faveur du public. Cette combinaison répond mieux aux besoins que la précédente. Il est intéressant d'examiner le calcul de la réserve

mathématique pour un groupe de polices. Si Y désigne la prime annuelle pure et Y'' la prime annuelle brute de la combinaison, la réserve mathématique sur primes pures peut s'écrire [1]):

$$C\,{}_tV_x({}_nE_x^{(c)}) = C_{n'}E_{x'} + tY''\,A^{1}_{x':\overline{n'}|} + Y''(IA)^{1}_{x':\overline{n'}|} - Y\,\ddot{a}_{x':n'|}. \quad (25)$$

Nous introduisons dans cette formule les nombres de commutation, de manière à en obtenir une autre dépendant uniquement de l'âge à l'inventaire:

$$C\,{}_tV_x({}_nE_x^{(c)}) = tY''\,A_{x'} + Y''(IA)_{x'} - Y\,\ddot{a}_{x'} + \frac{1}{D_{x'}} \cdot$$
$$\cdot\,[YN_{x+n} - Y''(R_{x+n} + nM_{x+n}) + CD_{x+n}]. \quad (26)$$

Le coefficient d'Altenburger est:

$$K = [YN_{x+n} - Y''(R_{x+n} + nM_{x+n}) + CD_{x+n}].$$

Dans le calcul par groupes, la forme finale de la réserve mathématique est donc:

$$\sum C\,{}_tV_x({}_nE_x^{(c)}) = A_{x'}\sum tY'' + (IA)_{x'}\sum Y'' - \ddot{a}_{x'}\sum Y + \frac{1}{D_{x'}}\sum K. \quad (27)$$

5° Assurances à terme fixe en cours

En vue du calcul par groupes, la formule de la réserve mathématique s'écrit:

$$C\,{}_tV_x^{(n)} = C\frac{v^{x+n}}{v^{x'}} - P\ddot{a}_{x'} + \frac{1}{D_{x'}}PN_{x+n} \quad (28)$$

avec le coefficient d'Altenburger:

$$K = PN_{x+n}.$$

La réserve d'un groupe de polices devient:

$$\sum C\,{}_tV_x^{(n)} = \frac{1}{v^{x'}}\sum Cv^{x+n} - \ddot{a}_{x'}\sum P + \frac{1}{D_{x'}}\sum K. \quad (29)$$

A côté des quantités $\ddot{a}_{x'}$ et $D_{x'}$, la formule de la réserve contient le facteur d'escompte certain $v^{x'}$ qui dépend de l'âge à l'inventaire.

---

[1]) Formule introduite par M. le Professeur Ch. Jéquier dans son cours à l'Université de Lausanne du semestre d'été 1955, «Les combinaisons rares dans l'assurance sur la vie».

Un nouveau terme, fonction de x', est là qui ne peut pas s'exprimer au moyen de ceux introduits plus haut: A_x, $\ddot{a}_{x'}$ et $D_{x'}$. La structure de la formule est cependant analogue; elle fait intervenir un nombre très limité de facteurs dépendant de l'âge à l'inventaire x', qui sont multipliés chacun par une somme de coefficients qui varient d'une police à l'autre, mais qui sont indépendants de l'âge à l'inventaire.

6° Assurances de rentes différées à primes annuelles

Le calcul par groupes au moyen de la méthode d'Altenburger des rentes immédiates viagères et temporaires est aisé.

Les rentes différées à primes annuelles connaissent une grande vogue dans la pratique. L'assuré paye pendant le différé une prime annuelle P pour avoir droit à une rente annuelle r, dès la $(x+n)^{e}$ année jusqu'à son décès.

Là aussi, le calcul par groupes des réserves se révèle avantageux.

La formule suivante nous donne la réserve mathématique individuelle durant le différé, en vue du calcul par groupes selon la méthode d'Altenburger:

$$ {}_tV_x({}_n|\ddot{a}_x) = -P\ddot{a}_{x'} + \frac{N_{x+n}}{D_{x'}}(r+P) \quad \text{pour } t<n. \qquad (30) $$

Le coefficient d'Altenburger est $K = N_{x+n}(r+P)$. Pour un groupe d'assurés, nous aurons:

$$ \sum {}_tV_x({}_n|\ddot{a}_x) = -\ddot{a}_{x'}\sum P + \frac{1}{D_{x'}}\sum K. \qquad (31) $$

La réserve mathématique prospective de cette assurance dépend de l'âge atteint à l'inventaire x' et du différé n. La méthode d'Altenburger calcule comme si la prime était due jusqu'à l'âge ω, et corrige l'erreur qui en résulterait au moyen d'un terme intervenant dans le coefficient d'Altenburger.

7° Assurances mixtes sur deux têtes au premier décès

Un bref examen de cette assurance pourra nous donner une idée de l'emploi de la méthode d'Altenburger dans le cas général des assurances sur plusieurs têtes.

Soit une assurance mixte conclue sur deux têtes, x et y, d'un capital C payable au premier décès ou à l'échéance si les deux têtes vivent, la prime annuelle étant P.

Supposons que la prime et les autres valeurs d'assurance soient déterminées au moyen de l'âge central ξ de x et de y et que les nombres de commutation et les valeurs actuarielles sur deux têtes de même âge soient donnés.

La réserve mathématique en vue du calcul par groupes selon la méthode d'Altenburger s'écrit:

$$C\,{}_tV_{\xi\xi:\overline{n}|} = CA_{\xi+t:\xi+t} - P\ddot{a}_{\xi+t:\xi+t} + \frac{1}{D_{\xi+t:\xi+t}}K, \tag{32}$$

où le coefficient d'Altenburger,

$$K = [PN_{\xi+m:\xi+m} + C(D_{\xi+n:\xi+n} - M_{\xi+n:\xi+n})].$$

K dépend des âges fixes $\xi+m$ et $\xi+n$; il est indépendant de l'âge à l'inventaire $\xi' = \xi + t$.

La réserve mathématique totale d'un groupe d'assurances de même âge central ξ' à l'inventaire sera:

$$\sum C\,{}_tV_{\xi\xi:\overline{n}|} = A_{\xi'\xi'}\sum C - \ddot{a}_{\xi'\xi'}\sum P + \frac{1}{D_{\xi'\xi'}}\sum K. \tag{33}$$

Si l'on a plus de deux têtes, le calcul pourrait s'effectuer en principe d'une manière analogue. Cependant, il est très rare de rencontrer dans la pratique des assurances conclues sur trois têtes ou plus, et pour un petit nombre de polices, le calcul par groupes des réserves mathématiques n'offre pas d'intérêt.

Lorsque l'emploi de l'âge central ne se justifie pas, la réserve mathématique pour l'assurance sur deux têtes au premier décès s'écrit:

$$C\,{}_tV_{xy:\overline{n}|} = CA_{x+t:y+t:\overline{n-t}|} - P\ddot{a}_{x+t:y+t:\overline{m-t}|},$$

ou bien:

$$\begin{aligned} C\,{}_tV_{xy:\overline{n}|} &= C\frac{M_{x'y'} - M_{x+n:y+n} + D_{x+n:y+n}}{D_{x'y'}} - \frac{1}{D_{x'y'}}P(N_{x'y'} - N_{x+m:y+m}) \\ C\,{}_tV_{xy:\overline{n}|} &= CA_{x'y'} - P\ddot{a}_{x'y'} + \frac{1}{D_{x'y'}}[PN_{x+m:y+m} + C(D_{x+n:y+n} - M_{x+n:y+n})]. \end{aligned} \tag{34}$$

Le groupement devrait se faire dans ce cas par couples ayant les mêmes âges x' et y' à l'inventaire. Les groupes seraient peu fournis et nombreux; la méthode n'a pas d'importance pratique.

8° Méthode d'Altenburger à primes d'inventaire

Jusqu'ici, nos réserves mathématiques ont été calculées sur primes pures. Dans certains pays, par exemple en France, la législation exige le calcul des réserves sur primes d'inventaire. En Suisse, on détermine les réserves sur primes pures, puis la réserve pour frais de gestion.

Nous nous contenterons d'examiner la méthode d'Altenburger pour les réserves sur primes d'inventaire de l'assurance mixte, afin de nous faire une idée de la nature du problème.

Nous désignerons par $C\alpha$ les frais annuels de gestion tant que dure le contrat, et par $C\alpha' = C\alpha \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$ le chargement pour frais de gestion contenu dans la prime annuelle, payable pendant m années au plus.

En partant de la formule de la réserve d'inventaire de l'assurance mixte, nous pouvons écrire:

$$C\,{}_tV'_{x:\overline{n}|} = C\,A'_{x':\overline{n'}|} - P'\,\ddot{a}_{x':\overline{m'}|} \tag{35}$$

$$C\,{}_tV'_{x:\overline{n}|} = \frac{C}{D_{x'}}\left[M_{x'} - M_{x'+n} + D_{x-n} + \alpha(N_{x'} - N_{x-n})\right] - \frac{P'}{D_{x'}}(N_{x'} - N_{x+m}),$$

et puis, il vient:

$$C\,{}_tV'_{x:\overline{n}|} = C\,A'_{x'} - P'\,\ddot{a}_{x'} + \frac{1}{D_{x'}}K \tag{36}$$

avec le coefficient d'Altenburger:

$$K = C(D_{x+n} - M_{x+n} + P'N_{x+m} - \alpha N_{x+n}),$$

et finalement pour un groupe de polices, nous aurons:

$$\sum C\,{}_tV'_{x:\overline{n}|} = A'_{x'}\sum C - \ddot{a}_{x'}\sum P' + \frac{1}{D_{x'}}\sum K. \tag{37}$$

Si la prime est payable pendant m années, m étant inférieur à la durée d'assurance n, la réserve mathématique sur primes d'inventaire dépasse la réserve sur primes pures; si elle est payable pendant toute la durée du contrat, la formule (37) est identique à la formule (19); les réserves mathématiques sur primes pures et celles sur primes d'inventaire sont égales. En tout état de cause, la structure de la formule (37) est analogue à celle de la formule (19). Les facteurs $A'_{x'}$, $\ddot{a}_{x'}$ et $\dfrac{1}{D_{x'}}$

sont multipliés par des quantités indépendantes de l'âge à l'inventaire x'. La méthode d'Altenburger ne pose pas de problème nouveau lorsqu'on calcule les réserves mathématiques sur primes d'inventaire.

En résumé, les considérations qui précèdent nous permettent de tirer la conclusion que la méthode d'Altenburger s'applique à un grand nombre de formes d'assurances et, entre autres, aux formes les plus usuelles. Elle permet de grouper les polices d'un portefeuille d'assurances d'après l'âge x' atteint au moment de l'inventaire, et d'exprimer ensuite les réserves mathématiques en fonction d'éléments prospectifs $A_{x'}$, $\ddot{a}_{x'}$, $(IA)_{x'}$, $A_{\xi'\xi'}$, $\ddot{a}_{\xi'\xi'}$, $\frac{1}{v^{x'}}$, et de $\frac{1}{D_{x'}}$, $\frac{1}{D_{\xi'\xi'}}$, fonctions de l'âge atteint x', multipliés respectivement par les sommes des quantités caractéristiques des polices, $\sum C$, $\sum P$, etc., et par la somme des coefficients d'Altenburger. C'est une méthode très générale. Nous allons nous appliquer à en déduire la méthode dérivée.

II. La méthode dérivée de la méthode d'Altenburger ou méthode U

Nous nous proposons de rechercher la méthode de groupement correspondant à celle d'Altenburger en vertu de la correspondance «prospectif-rétrospectif» $(P \rightarrow R)$ définie plus haut. Nous espérons aboutir à un résultat susceptible d'application pratique.

La méthode d'Altenburger groupe les polices selon les âges atteints à l'inventaire. La correspondance «prospectif-rétrospectif» fait correspondre, pour chaque police, au moment t de l'inventaire ce moment lui-même. La nouvelle méthode groupera donc, elle aussi, les polices d'après l'âge à l'inventaire. Dans les deux méthodes, les groupes correspondants seront les mêmes.

1° Assurances mixtes

Considérons d'abord le cas de l'assurance mixte. Pour les assurances vie-entière et temporaire au décès, nous obtiendrions des formules analogues.

Dans la correspondance $P \rightarrow R$, à l'âge terme $x+n$ d'une assurance correspond son âge d'entrée x; au calcul prospectif de la réserve mathématique correspond le calcul rétrospectif; aux éléments $A_{x+t:\overline{n-t}|}$ et $P\ddot{a}_{x-t:\overline{m-t}|}$ correspondent respectivement ${}_tS_x$ et $P\bar{s}_{x:\overline{t}|}$. Dès que t

dépasse m, où m désigne la durée du paiement de la prime, $\ddot{a}_{x-t:\overline{m-t}|}$ est remplacé par 0 et $\bar{s}_{x:\overline{t}|}$ par $\dfrac{D_{x+t}}{D_{x+m}}\,\bar{s}_{x:\overline{m}|}$; les primes encaissées jusqu'au moment m continuent en effet à se capitaliser viagèrement.

Parallèlement à la formule prospective utilisée dans la méthode d'Altenburger, la formule rétrospective de la réserve mathématique s'écrit:

$$C_{\,t}V_{x:\overline{n}|} = P\,\bar{s}_{x:\overline{t}|} - C_{\,|t}S_x, \tag{38}$$

où $\bar{s}_{x:\overline{t}|}$ représente la valeur finale de la rente et ${}_tS_x$ désigne la valeur finale du risque.

Dans la méthode d'Altenburger, par l'introduction des nombres auxiliaires, on fait en sorte que la réserve mathématique devienne fonction d'une seule variable: l'âge atteint à l'inventaire. On y parvient en remplaçant chaque police mixte par une assurance auxiliaire vie-entière. On introduit ainsi un âge-terme commun à toutes les assurances auxiliaires. A ces assurances vie-entière et à cet âge commun doivent correspondre dans la transformation $P \rightarrow R$, des assurances auxiliaires ayant un âge d'entrée commun.

Dans la partie précédente, nous n'avons pas encore défini quel âge spécial doit correspondre à l'âge $\omega + 1$ de la table de mortalité qui suit immédiatement le dernier âge auquel le nombre l_x des vivants n'est pas nul. Il se distingue en ceci que tous les vivants sont décédés. A ce point de vue, on serait peut-être tenté de lui assigner comme correspondant le moment de la naissance, soit $x = 0$. Cependant, si, du point de vue humain, on oppose volontiers la naissance au décès, dans notre correspondance rien ne nous oblige à le faire. On pourrait songer aussi de faire correspondre, à la fin de la table, son début: $x = 15$, $x = 20$ ou 25, etc., soit le plus petit âge par lequel la table commence.

L'âge $\omega + 1$ est caractérisé par le fait que les nombres de commutation $D_{\omega+1}$, $N_{\omega+1}$, $M_{\omega+1}$, etc., sont nuls, ce qui amène des simplifications dans la formule de la réserve mathématique après sa transformation. Dans la table de mortalité, aucun autre âge et pas non plus l'âge 0 ou l'âge le plus petit n'a cette propriété.

La correspondance $P \rightarrow R$ ne peut pas être comparée à une homologie ou à une autre transformation de la géométrie projective. C'est une correspondance d'un tout autre genre. Nous sommes encore libre de

faire correspondre à l'âge $\omega + 1$ de la table un âge quelconque. Pour donner une meilleure vue d'ensemble de la méthode dérivée de celle d'Altenburger, que nous cherchons, nous choisirons comme âge correspondant de $\omega + 1$ un âge inférieur ou égal au plus petit âge d'entrée des assurances appartenant au groupe de polices considérées.

Aux assurances auxiliaires vie-entière de la méthode d'Altenburger correspondront alors des assurances auxiliaires ayant toutes l'âge d'entrée σ dans la méthode dérivée (méthode *U*) et pour âges-termes, les âges-termes respectifs des polices.

Ces considérations nous amènent à transformer la formule rétrospective de la réserve mathématique:

$$C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = P\frac{N_x - N_{x'}}{D_{x'}} - C\frac{M_x - M_{x'}}{D_{x'}}, \qquad \text{où } x' = x+t, \tag{39}$$

$$C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = P\frac{N_\sigma - N_{x'}}{D_{x'}} - C\frac{M_\sigma - M_{x'}}{D_{x'}} + C\frac{M_\sigma - M_x}{D_{x'}} - P\frac{N_\sigma - N_x}{D_{x'}}. \tag{40}$$

Or:

$$\frac{N_\sigma - N_{x'}}{D_{x'}} = \ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|},$$

et

$$\frac{M_\sigma - M_{x'}}{D_{x'}} = {}_{|x'-\sigma}S_\sigma.$$

Il vient donc:

$$C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = P\,\ddot{s}_{\sigma:x'-\sigma} - C\,{}_{x'-\sigma}S_\sigma - \frac{1}{D_{x'}}[P(N_\sigma - N_x) - C(M_\sigma - M_x)]. \tag{41}$$

Le coefficient de cette nouvelle méthode de groupement est $\overline{K}$:

$$\overline{K} = [P(N_\sigma - N_x) - C(M_\sigma - M_x)].$$

Il est fonction de l'âge d'entrée x. L'âge σ reste constant pour toutes les polices.

Dans la méthode dérivée, la réserve mathématique d'un groupe de polices a pour expression:

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = \ddot{s}_{\sigma:x'-\sigma}\sum P - {}_{x'-\sigma}S_\sigma \sum C - \frac{1}{D_{x'}}\sum \overline{K}. \tag{42}$$

Si l'on fixe σ une fois pour toutes, on peut aisément faire un tableau des facteurs de capitalisation $\ddot{s}_{\sigma:x'-\sigma}$ et ${}_{x'-\sigma}S_\sigma$ ainsi que des nouveaux coefficients $\overline{K}$.

A notre connaissance, la question n'a jamais été examinée sous cet aspect jusqu'à présent. C'est pourquoi, nous le faisons dans ce travail.

Grâce à l'introduction de l'assurance auxiliaire vie-entière, la méthode d'Altenburger permet d'exprimer la réserve mathématique prospective de l'assurance mixte en fonction de la seule variable x'. De même, dans la méthode dérivée, la réserve mathématique s'obtient en fonction de la même variable x' après l'adjonction de l'assurance auxiliaire d'âge à l'entrée σ.

Comme la méthode d'Altenburger, la méthode U est mathématiquement exacte. Un exemple numérique va nous permettre de nous rendre compte de son application et de sa valeur pratique dans le cas d'un petit groupe de polices.

Exemple numérique 1: Nous avons un groupe de 10 polices d'assurances mixtes ayant la même année de naissance et nous nous proposons de calculer la réserve mathématique totale, le 1er juillet 1960, selon la table SM 1948 53 à $2\frac{1}{2}\,\%$; les assurés du groupe sont tous nés le 1er juillet 1915; de même, les souscriptions et les échéances des contrats tombent toutes sur le 1er juillet de l'année. Nous prenons $\sigma = 15$.

Pol. N°	Naissance	Souscription	Echéance	C	P	$\frac{\bar{K}}{1000}$	Réserve individuelle
1	1915	1940	1965	10 000	299,50	166 588	7 440
2	1915	1940	1965	5 000	149,75	83 294	3 720
3	1915	1940	1970	15 000	357,90	196 509	8 688
4	1915	1950	1965	10 000	561,00	562 012	6 208
5	1915	1945	1970	12 000	364,56	284 627	6 268
6	1915	1945	1970	10 000	303,80	237 189	5 224
7	1915	1945	1975	5 000	122,40	94 305	2 055
8	1915	1950	1975	15 000	468,75	458 121	4 941
9	1915	1945	1965	10 000	396,80	313 762	6 982
10	1915	1955	1975	20 000	829,80	964 391	4 119
				112 000	3854,26	3 360 798	55 644

Le calcul de la réserve mathématique par la méthode U:

$$\sum {}_tV_{x:\overline{n}|} = \breve{s}_{\sigma:\overline{45-\sigma}|} \sum P - {}_{45-\sigma}S_\sigma \sum C - \frac{1}{D_{45}} \sum \overline{K} \quad \text{avec} \quad \breve{s}_{\sigma:\overline{45-\sigma}|} = 47{,}132$$

et en valeurs numérique, nous aurons: $\quad {}_{45-\sigma}S_\sigma = 0{,}09\,612$

$$D_{45} = 29\,162$$

$$\sum {}_tV_{x:\overline{n}|} = 47{,}132 \cdot 3\,854{,}26 - 0{,}09\,612 \cdot 112\,000 - \frac{3\,360\,798}{29{,}162} \qquad \frac{\overline{K}}{1000} = 3\,360\,798$$

$$\sum {}_tV_{x:\overline{n}|} = \underline{55\,648}.$$

Nous avons effectué le même calcul par la méthode individuelle et par la méthode d'Altenburger, et nous avons obtenu les résultats suivants:

Méthodes	Réserves mathématiques
Méthode individuelle	55 644
Méthode d'Altenburger	55 640
Méthode U	55 648

Les différences sont insignifiantes et comme les trois méthodes sont mathématiquement exactes, elles ne peuvent provenir que des incertitudes dans les nombres de commutation et dans les calculs. Nous pouvons remarquer que la nouvelle méthode est excellente pour les applications pratiques; elle ne le cède en rien à la méthode d'Altenburger en ce qui concerne la rapidité dans les calculs et la précision.

Jusqu'ici, certains auteurs ont proposé le calcul des réserves par groupes au moyen de la formule rétrospective habituelle:

$$\sum {}_tV_{x:\overline{n}|} = \breve{s}_{x:\overline{t}|} \sum P - {}_{|t}S_x \sum C.$$

On voit que deux variables interviennent dans cette formule: l'âge d'entrée x et le nombre d'années courues t. Pour l'appliquer, on groupe d'abord les cartes techniques d'après l'année de naissance des assurés. Puis on forme des sous-groupes suivant les années d'entrée, de telle sorte que, dans tout sous-groupe, le paramètre t reste le même. Mais cette façon de procéder conduit à un trop grand nombre de groupes et de sous-groupes et le travail que cela représente est trop long. Ainsi donc, l'avantage de cette méthode sur le calcul individuel des réserves mathématiques s'en trouve diminué. Ce fait marque mieux encore la valeur de notre nouvelle méthode, son application facile et avantageuse.

2° Assurances de capitaux différés

a) Sans contre-assurance:

Dans la formule prospective de la réserve mathématique, le terme positif $C_{n'}E_{x'}$ exprime la valeur actuelle, au moment t, des engagements futurs de l'assureur. Dans la méthode rétrospective, la valeur finale des prestations payées par l'assureur jusqu'au moment t est nulle. Donc, le produit $C_{n'}E_{x'}$ dans la méthode prospective correspond à 0. Dans la première méthode, le terme négatif $P\ddot{a}_{x':\overline{n'}|}$ nous donne la valeur actuelle, au moment t, des contributions périodiques futures de l'assureur. A celle-ci correspond dans la deuxième méthode la valeur finale $P\bar{s}_{x:\overline{t}|}$ des contributions payées par l'assuré. Nous avons ainsi une correspondance entre la formule prospective et la formule rétrospective:

$$C_{\ t}V_x(_nE_x) = P\bar{s}_{x:\overline{t}|}. \tag{43}$$

Ici aussi, nous cherchons une méthode dérivée analogue à celle que nous avons trouvée pour l'assurance mixte, qui doit correspondre à la méthode d'Altenburger.

Introduisons dans la formule (43) l'âge σ qui correspond à l'âge $\omega+1$ de la méthode d'Altenburger:

$$C_{\ t}V_x(_nE_x) = P\frac{(N_\sigma - N_{x'})}{D_{x'}} - \frac{1}{D_{x'}}P(N_\sigma - N_x). \tag{44}$$

Le coefficient de la méthode U est donc:

$$\overline{K} = P(N_\sigma - N_x).$$

Il est indépendant de t.

Nous aurons en définitive pour un groupe de polices:

$$\underline{\Sigma}\, C_{\ t}V_x(_nE_x) = \bar{s}_{\sigma:x'-\sigma}\ \underline{\Sigma}\, P - \frac{1}{D_{x'}}\ \underline{\Sigma}\, \overline{K}. \tag{45}$$

Pour les assurances de rentes différées à primes annuelles, on aura une formule analogue à celle des capitaux différés.

Nous allons voir l'application de notre nouvelle méthode dans un exemple numérique.

Exemple numérique 2: Nous désirons calculer la réserve mathématique totale, le 1er juillet 1960, d'un groupe de 8 polices de capitaux différés à primes annuelles selon la table finale MR 1950 à 2½ %. Nous convenons de fixer σ à 15 ans.

Pol. No	Naissance	Souscription	Echéance	C	P	$\frac{\overline{K}}{1000}$	Réserve individuelle
1	1920	1945	1965	12 000	443,90	261 246	8 327
2	1920	1945	1970	10 000	272,07	160 120	5 104
3	1920	1945	1965	8 000	295,93	174 162	5 552
4	1920	1950	1965	6 000	318,25	263 617	3 708
5	1920	1950	1970	10 000	366,47	303 560	4 270
6	1920	1955	1970	5 000	263,08	273 098	1 429
7	1920	1955	1975	8 000	288,63	299 621	1 568
8	1920	1950	1965	5 000	265,20	219 674	3 090
				64 000	2 513,53	1 955 098	33 048

Le calcul de la réserve mathématique par la méthode U:

$$\sum C_t V_x({}_nE_x) = \ddot{s}_{\sigma:\overline{25}|} \sum P - \frac{1}{D_{40}} \sum \overline{K} \quad \text{où nous avons:} \quad \begin{matrix} \ddot{s}_{\sigma:\overline{25}|} = 36{,}207 \\ D_{40} = 33\,731{,}8 \end{matrix}$$

en valeurs numériques, nous aurons:

$$\sum C_t V_x({}_nE_x) = 36{,}207 \cdot 2\,513{,}53 - \frac{1\,955\,098}{33{,}7\,318}$$

$$\sum C_t V_x({}_nE_x) = \underline{33\,047}.$$

Comparons ce résultat à ceux obtenus par les autres méthodes.

Méthodes	Réserves mathématiques
Méthode individuelle	33 048
Méthode d'Altenburger	33 048
Méthode U	33 047

La méthode U, comme du reste les deux autres, est mathématiquement exacte.

b) avec contre-assurance:

Dans cette combinaison, la formule rétrospective de la réserve mathématique est plus simple que la formule prospective. A la valeur actuelle des primes futures $Y\,\ddot{a}_{x':\overline{n'}|}$ de la formule prospective correspond la valeur finale des primes payées $Y\,\ddot{s}_{x:\,t|}$ de la formule rétrospective. D'autre part, à la valeur actuelle, au moment t, des engagements futurs de l'assureur, lesquels comprennent le paiement du capital assuré en cas de vie à l'échéance et le remboursement des primes payées en cas de décès pendant le différé, correspond la valeur finale du risque de remboursement des primes annuelles brutes en cas de décès avant l'échéance. Cela revient à dire que dans les formules, à $\left[C_{n'}E_{x'}+tY''\,A^{1}_{x':\overline{n'}|}+(IA)^{1}_{x':\overline{n'}|}\right]$ correspond $Y''(IA)^{1}_{x:\,\overline{t}|\,t}I_x$.

La formule rétrospective de la réserve mathématique de cette assurance est: $C_{\,t}V_{x(n}E^{(c)}_{x)} = Y\,\ddot{s}_{x:\,\overline{t}|} - Y''(IA)^{1}_{x:\,\overline{t}|\,t}I_x$, (46)

où Y désigne la prime annuelle pure et Y'' la prime annuelle brute de l'assurance.

En vue d'introduire l'âge σ, nous transformons cette dernière formule en ajoutant et en retranchant $Y\,\dfrac{N_\sigma}{D_{x'}}$ d'une part et $Y''\,\dfrac{R_\sigma+(x-\sigma)[M_\sigma+M_{x'}]}{D_{x'}}$ d'autre part. La formule devient:

$$C_{\,t}V_{x(n}E^{(c)}_{x)} = Y\,\frac{N_\sigma-N_{x'}}{D_{x'}} - Y''\,\frac{R_\sigma-R_{x'}-(x'-\sigma)\,M_{x'}}{D_{x'}} + (x-\sigma)\,Y''\,\frac{M_\sigma-M_{x'}}{D_{x'}}$$

$$-\frac{1}{D_{x'}}\left[Y(N_\sigma-N_x)-Y''\left\{(R_\sigma-R_x)-(x-\sigma)\,M_\sigma\right\}\right]. \qquad (47)$$

C'est la formule de la méthode U. Le coefficient $\overline{K}$ est donc:

$$\overline{K} = \left[Y(N_\sigma-N_x)-Y''\left\{(R_\sigma-R_x)-(x-\sigma)\,M_\sigma\right\}\right].$$

Nous posons:

$${}_{|x'-\sigma}(IS)_\sigma = \frac{R_\sigma-R_{x'}-(x'-\sigma)\,M_{x'}}{D_{x'}}, \text{ et } {}_{|x'-\sigma}S_\sigma = \frac{M_\sigma-M_{x'}}{D_{x'}}$$

La formule peut s'écrire:

$$C_{\,t}V_{x(n}E^{(c)}_{x)} = Y\,\ddot{s}_{\sigma:\,\overline{x'-\sigma}} - Y''\,{}_{|x'-\sigma}(IS)_\sigma + (x-\sigma)\,Y''\,{}_{|x'-\sigma}S_\sigma - \frac{1}{D_{x'}}\,\overline{K}, \qquad (48)$$

et pour un groupe de polices, nous aurons: (49)

$$\sum C_{\,t}V_{x(n}E^{(c)}_{x)} = \ddot{s}_{\sigma:\,\overline{x'-\sigma}|}\sum Y - \left[{}_{|x'-\sigma}(IS)_\sigma\sum Y'' - {}_{|x'-\sigma}S_\sigma\sum(x-\sigma)\,Y''\right] - \frac{1}{D_{x'}}\sum\overline{K}.$$

Nous allons appliquer notre méthode dérivée à l'exemple numérique ci-dessous.

Exemple numérique 3: Il s'agit de calculer la réserve mathématique, au 1er juillet 1960, d'un groupe de 8 polices de capital différé avec contre-assurance des primes selon la table SM 1948/53 à $2^1/_2\,^0/_0$. Pour le calcul des primes brutes, les frais sont: frais de gestion $\alpha = 1\,^0/_{00}$ de C, frais d'acquisition $\beta = 0{,}5\,^0/_0$ et frais d'encaissement $\gamma = 2{,}5\,^0/_0$ de la prime. L'âge σ est fixé à 20 ans.

Pol. N°	Naissance	Souscription	Echéance	C	Y	Y''	$(x-\sigma)\,Y''$	$\frac{\bar{K}}{1000}$
1	1915	1945	1965	8 000	303,31	320,94	3 209,40	156 697
2	1915	1945	1970	12 000	337,28	360,08	3 600,80	174 260
3	1915	1950	1970	10 000	377,71	399,70	5 995,50	276 357
4	1915	1950	1965	6 000	324,88	341,11	5 116,65	237 676
5	1915	1950	1975	15 000	416,81	445,16	6 677,40	305 004
6	1915	1950	1970	12 000	453,25	479,64	7 194,60	331 626
7	1915	1955	1970	8 000	432,13	453,75	9 075,00	398 636
8	1915	1955	1975	14 000	524,59	555,25	11 105,00	484 006
				85 000	3 169,96	3 355,63	51 974,05	2 364 262

Le calcul de la réserve mathématique par la méthode U:

$$\sum C_t V_x({}_nE_x^{(c)}) = \ddot{s}_{\sigma:\overline{45-\sigma}|} \sum Y - \left[{}_{|45-\sigma}(IS)_\sigma \sum Y'' - {}_{45-\sigma}S_\sigma \sum (x-\sigma)\,Y''\right] - \frac{1}{D_{45}} \sum \bar{K}.$$

En valeurs numériques, nous écrivons:

$$\begin{aligned}\sum C_t V_x({}_nE_x^{(c)}) &= 36{,}460 \cdot 3\,169{,}96 \\ &\quad - [1{,}13\,528 \cdot 3\,355{,}63 \\ &\quad\quad - 0{,}08\,350 \cdot 51\,974{,}05] \\ &\quad - \frac{2\,364\,262}{29{,}162}\end{aligned}$$

$$\sum C_t V_x({}_nE_x^{(c)}) = \underline{35\,034}.$$

où nous avons:

$$\ddot{s}_{\sigma:\overline{45-\sigma}|} = 36{,}460$$

$${}_{|45-\sigma}(IS)_\sigma = 1{,}13\,528$$

$${}_{|45-\sigma}S_\sigma = 0{,}08\,350$$

$$D_{45} = 29\,162$$

Nous pourrons comparer ce résultat à ceux que nous avons obtenus par les autres méthodes.

Méthodes	Réserves mathématiques
Méthode individuelle	35 034
Méthode d'Altenburger	35 031
Méthode U	35 034

Comme la méthode d'Altenburger, la méthode U est mathématiquement exacte.

3° Assurances à terme fixe en cours

Examinons d'abord la formule rétrospective de la réserve mathématique:

$$C\,{}_tV_x^{(n)} = P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|} - C\,k_{x:\overline{t}|}\ ^1). \qquad (50)$$

$$\text{où} \quad k_{x:\overline{t}|} = v^{n-t}\,\frac{l_x - l_{x'}}{l_{x'}} = \frac{l_x - l_{x'}}{D_{x'}}\,v^{x+n}.$$

Le terme $P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ de la formule rétrospective correspond au terme $P\,\ddot{a}_{x':\overline{n'}|}$ de la formule prospective et la valeur finale du risque $C\,k_{x:\overline{t}|}$ à la prime unique $C\,v^{n'}$, où $n' = n - t$.

En nombres de commutation, la formule devient:

$$C\,{}_tV_x^{(n)} = P\,\frac{N_x - N_{x'}}{D_{x'}} - C\,v^{n'}\,\frac{l_x - l_{x'}}{l_{x'}}.$$

Comme nous l'avons fait pour les combinaisons précédentes, nous introduisons l'âge σ inférieur à tous les âges d'entrée des polices du groupe, en ajoutant et en retranchant au deuxième membre de la formule $P\,\frac{N_\sigma}{D_{x'}}$ d'une part, et $C\,v^{n'}\,\frac{l_\sigma}{l_{x'}}$ d'autre part. Cela nous permet d'écrire la formule de la réserve sous la forme:

$$C\,{}_tV_x^{(n)} = P\,\frac{N_\sigma - N_{x'}}{D_{x'}} - C\,v^{n'}\,\frac{l_\sigma - l_{x'}}{l_{x'}} - \frac{1}{D_{x'}}\left[P(N_\sigma - N_x) - C\,v^{x+n}(l_\sigma - l_x)\right] \qquad (51)$$

---

[1]) Voir «L'assurance à terme fixe et les combinaisons usuelles» par M. le professeur Ch. Jéquier, page 54, La Concorde Lausanne.

ou, en posant:

$$k^*_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} = \frac{l_\sigma - l_{x'}}{D_{x'}}, \text{ et } \overline{K} = [P(N_\sigma - N_x) - Cv^{x+n}(l_\sigma - l_x)],$$

on obtient:

$$C\,{}_tV^{(n)}_x = P\bar{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} - Cv^{x+n}k^*_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} - \frac{1}{D_{x'}}\overline{K}. \qquad (52)$$

$k^*_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}$ est une fonction de x', tandis que $\overline{K}$ est une constante pour chaque police du groupe considéré, qui s'exprime à l'aide de σ et des caractéristiques x et n de la police, mais qui ne dépend pas de t.

Pour un groupe d'assurés, nous aurons:

$$\sum C\,{}_tV^{(n)}_x = \bar{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}\sum P - k^*_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}\sum Cv^{x+n} - \frac{1}{D_{x'}}\sum \overline{K}. \qquad (53)$$

C'est la formule de la méthode dérivée de celle d'Altenburger.

Nous donnons un exemple numérique en vue de mieux connaître l'application pratique de notre nouvelle méthode dans le cas de l'assurance à terme fixe.

Exemple numérique 4: Nous nous proposons de calculer la réserve mathématique totale, au 1er janvier 1960, d'un groupe de 10 polices selon la table SM 1948/53 à 2½%. L'âge auxiliaire σ est de 15 ans.

Pol. N°	Naissance	Souscription	Echéance	C	Cv^{x+n}	P	$\frac{\overline{K}}{1000}$	Réserve individuelle
1	1920	1950	1970	10 000	2 909,42	391,02	315 209	4 366
2	1920	1950	1965	5 000	1 645,87	276,34	223 714	3 112
3	1920	1955	1975	10 000	2 571,51	394,87	399 263	2 052
4	1920	1955	1970	6 000	1 745,65	333,45	338 563	1 749
5	1920	1945	1965	7 000	2 304,22	272,48	155 956	4 898
6	1920	1950	1965	8 000	2 633,39	442,15	357 948	4 980
7	1920	1950	1970	5 000	1 454,71	195,51	157 605	2 183
8	1920	1955	1975	12 000	3 085,81	473,81	479 111	2 463
9	1920	1945	1965	10 000	3 291,74	389,25	222 791	6 998
10	1920	1950	1965	6 000	1 975,04	331,61	268 459	3 735
				79 000	23 617,36	3 500,52	2 918 619	36 536

Le calcul de la réserve mathématique par la méthode U:

$$\underline{\sum} C_t V_x^{(n)} = \breve{s}_{\sigma:\overline{40-\sigma}|} \underline{\sum} P - k^*_{\sigma:\overline{40-\sigma}|} \underline{\sum} C v^{x+n} - \frac{1}{D_{40}} \underline{\sum} \overline{K}.$$

En valeurs numériques, nous aurons:

$$\underline{\sum} C_t V_x^{(n)} = 36{,}130 \cdot 3\,500{,}52 - 0{,}13\,455 \cdot 23\,617{,}36 - \frac{2\,918\,619}{33{,}639}$$

$$\breve{s}_{\sigma:\overline{40-\sigma}|} = 36{,}130$$
$$k^*_{\sigma:\overline{40-\sigma}|} = 0{,}13\,455$$
$$D_{40} = 33\,639$$

$$\underline{\sum} C_t V_x^{(n)} = \underline{36\,533}.$$

Nous pouvons comparer ce résultat à ceux que nous avons obtenus par les autres méthodes:

Méthodes	Réserves mathématiques
Méthode individuelle	36 536
Méthode d'Altenburger	36 535
Méthode U	36 533

Les différences constatées sont extrêmement faibles. Rappelons que cette nouvelle méthode, elle aussi, est mathématiquement exacte.

4° Assurances mixtes sur deux têtes au premier décès

La formule rétrospective de la réserve mathématique d'une assurance mixte conclue sur deux têtes, x et y, s'écrit, au moyen de l'âge central ξ de x et de y, de la manière suivante:

$$C_t V_{\xi\xi:\overline{n}|} = P \breve{s}_{\xi\xi:\overline{t}|} - C_{|t} S_{\xi\xi}. \tag{54}$$

Introduisons dans cette formule l'âge auxiliaire σ inférieur à ξ et écrivons:

$$C_t V_{\xi\xi:\overline{n}|} = P \frac{N_{\sigma\sigma} - N_{\xi+t:\xi+t}}{D_{\xi+t:\xi+t}} - C \frac{M_{\sigma\sigma} - M_{\xi+t:\xi+t}}{D_{\xi+t:\xi+t}} - \frac{1}{D_{\xi+t:\xi+t}} [P(N_{\sigma\sigma} - N_{\xi\xi}) - C(M_{\sigma\sigma} - M_{\xi\xi})],$$

$$C_t V_{\xi\xi:\overline{n}|} = P \breve{s}_{\sigma\sigma:\overline{\xi'\xi'-\sigma\sigma}|} - C_{|\xi'\xi'-\sigma\sigma} S_{\sigma\sigma} - \frac{1}{D_{\xi'\xi'}} \overline{K}, \tag{55}$$

où le nouveau coefficient est $\overline{K} = [P(N_{\sigma\sigma} - N_{\xi\xi}) - C(M_{\sigma\sigma} - M_{\xi\xi})]$, il dépend uniquement des âges fixes σ et ξ.

La réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés sera donc:

$$\sum {}_tV_{\xi\xi:\overline{n}} = \ddot{s}_{\sigma\sigma:\overline{\xi'\xi'-\sigma\sigma}} \sum P - {}_{|\xi'\xi'-\sigma\sigma}S_{\sigma\sigma} \sum C - \frac{1}{D_{\xi'\xi'}} \sum \overline{K}. \quad (56)$$

Ainsi, pour toutes les combinaisons à l'étude, nous avons obtenu une méthode de calcul par groupes des réserves mathématiques, la méthode dérivée de celle d'Altenburger ou méthode U. On pourrait également calculer la réserve mathématique sur primes d'inventaire. Le résultat serait analogue à celui obtenu dans le premier paragraphe.

III. La méthode d'Altenburger généralisée

Dans la méthode d'Altenburger, on remplace en quelque sorte toute assurance par une assurance auxiliaire, de manière à n'avoir dans la formule de la réserve mathématique qu'un nombre aussi limité que possible de facteurs dépendant de l'âge atteint $x' = x+t$. Les autres quantités intervenant dans le calcul de la réserve sont indépendantes de x'; pour chaque assurance, ce sont des constantes qui peuvent être calculées au début de l'assurance et inscrites sur la fiche technique. Ainsi, chaque assurance mixte est remplacée par une assurance auxiliaire vie-entière.

La correspondance «prospectif-rétrospectif» ($P \rightarrow R$) transforme la méthode d'Altenburger en une autre méthode de groupement, la méthode dérivée de celle d'Altenburger que nous avons appelée méthode U. Toute assurance mixte y est remplacée par une assurance auxiliaire ayant un âge d'entrée σ fixé à l'avance.

Inversément, nous pouvons maintenant appliquer à la méthode trouvée une transformation «rétrospectif-prospectif» ($R \rightarrow P$). Si nous faisons correspondre à l'âge σ ci-dessus l'âge $\omega + 1$ de la table, on retrouve la méthode d'Altenburger, telle que nous l'avons rappelée plus haut. Mais nous pouvons aussi faire correspondre à l'âge σ un âge bien déterminé ϱ de la table de mortalité, différent de $\omega + 1$. Les assurances auxiliaires avec σ pour âge d'entrée ont pour correspondantes des assurances auxiliaires d'âge-terme ϱ; ces dernières remplacent les assurances vie-entière de la méthode primitive d'Altenburger. Comme nous avons choisi plus haut l'âge σ inférieur aux âges d'entrée de toutes les polices du groupe considéré, nous adopterons d'abord ici pour ϱ un âge supérieur à tous les âges-termes des assurances du groupe.

Examinons cette nouvelle méthode pour les combinaisons d'assurance à l'étude.

1° Assurances mixtes

Après la transformation $R \to P$, la réserve mathématique d'une assurance mixte s'écrit:

$$C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = C\,\frac{(M_{x'}-M_\varrho)-(M_{x+n}-M_\varrho)+D_{x+n}}{D_{x'}} - P\,\frac{(N_{x'}-N_\varrho)-(N_{x+m}-N_\varrho)}{D_{x'}} \qquad (54)$$

$$C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = CA^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|} - P\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} + \frac{1}{D_{x'}}\left[CD_{x+n} - C(M_{x+n}-M_\varrho) + P(N_{x+m}-N_\varrho)\right], \qquad (55)$$

et les réserves mathématiques d'un groupe de polices:

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum C - \ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum P + \frac{1}{D_{x'}}\sum K. \qquad (56)$$

Le coefficient K d'Altenburger est, comme il se doit, indépendant de l'âge x' à l'inventaire. Il peut être calculé à l'avance pour chaque police en fonction des âges fixes $x+n$, $x+m$ et ϱ. On voit aussi que ce nouveau coefficient d'Altenburger peut être obtenu de celui de la méthode primitive d'Altenburger en y ajoutant la quantité $CM\varrho$ et en retranchant $PN\varrho$. En compensation, ces quantités figurent avec le signe contraire dans $CA^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|}$ et $P\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}$, de sorte que le passage de l'expression primitive de la réserve mathématique à la nouvelle est immédiat.

Au premier abord, la nouvelle expression paraît devoir conduire à des calculs numériques un peu plus longs que l'expression primitive, à cause des différences $M_{x+n}-M_\varrho$ et $N_{x+m}-N_\varrho$. En réalité, il n'en est rien. Il suffit en effet de remplacer les colonnes de commutation usuelles M_x et N_x par les nouvelles colonnes $M_{x:\overline{\varrho-x}|}$ et $N_{x:\overline{\varrho-x}|}$ qu'on obtient en additionnant les C_x et les D_x à partir de C_ϱ et D_ϱ au lieu de le faire depuis la fin de la table.

La nouvelle expression a l'avantage de bien montrer le mécanisme de la méthode d'Altenburger. On prolonge l'assurance temporaire primitive jusqu'à l'âge ϱ, puis on en retranche une assurance temporaire différée couvrant le décès dès l'âge $x+n$ jusqu'à l'âge ϱ. On peut écrire en effet:

$$C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{C}{D_{x'}}\left[(M_{x'}-M_{x+n})+(M_{x+n}-M_\varrho)-(M_{x+n}-M_\varrho)+D_{x+n}\right] - \frac{P}{D_{x'}}\left[(N_{x'}-N_{x+m})+(N_{x+m}-N_\varrho)-(N_{x+m}-N_\varrho)\right]. \qquad (54')$$

Il faut cependant remarquer que dans ces opérations, on conserve toujours la prime de l'assurance primitive, sans l'adapter aux nouvelles durées. De même, dans la méthode primitive d'Altenburger, où l'assurance mixte est remplacée par une vie-entière, on continue de calculer avec la prime de l'assurance mixte.

2° Assurances vie-entière

Considérons d'abord le cas où le nombre des primes est limité à m années. La formule de la réserve mathématique, comme on le sait, est un cas particulier de celle de l'assurance temporaire au décès. Introduisons l'âge ϱ correspondant à l'âge σ de la méthode U. La réserve mathématique sera alors:

$$C\,{}_tV_x = C\frac{(M_{x'}-M_\varrho)+M_\varrho}{D_{x'}} - P\frac{(N_{x'}-N_\varrho)-(N_{x+m}-N_\varrho)}{D_{x'}} \qquad (57)$$

$$C\,{}_tV_x = CA^1_{x':\overline{\varrho-x'}|} - P\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} + \frac{1}{D_{x'}}\left[P(N_{x+m}-N_\varrho)+CM_\varrho\right]. \qquad (58)$$

La réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés est donnée par:

$$\sum C\,{}_tV_x = A^1_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum C - \ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum P + \frac{1}{D_{x'}}\sum K, \qquad (59)$$

où K est le coefficient de la méthode d'Altenburger généralisée:

$$K = \left[P(N_{x+m}-N_\varrho)+CM_\varrho\right].$$

Ce dernier comprend des termes dépendant des âges constants $x+m$ et ϱ; il est en revanche indépendant de l'âge à l'inventaire x'. Remarquons qu'il s'obtient, comme dans l'assurance mixte, en ajoutant au coefficient de la méthode d'Altenburger proprement dite la quantité CM_ϱ et en en retranchant PN_ϱ. Ces quantités se trouvent d'ailleurs avec le signe contraire dans $CA^1_{x':\overline{\varrho-x'}|}$ et $P\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}$.

Si la prime annuelle est viagère, la formule ci-dessus reste la même, mais le coefficient K se simplifie en:

$$K = (CM_\varrho - PN_\varrho).$$

3° Assurances temporaires au décès

La réserve mathématique d'une assurance temporaire au décès s'exprime à la suite de la transformation $R \rightarrow P$:

$$C\,{}_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = C\,\frac{(M_{x'}-M_\varrho)-(M_{x+n}-M_\varrho)}{D_{x'}} - P\,\frac{(N_{x'}-N_\varrho)-(N_{x+m}-N_\varrho)}{D_{x'}} \qquad (60)$$

$$C\,{}_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = C\,A^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|} - P\,\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} + \frac{1}{D_{x'}}\,[P(N_{x+m}-N_\varrho) - C(M_{x+n}-M_\varrho)]. \qquad (61)$$

Le coefficient de la méthode d'Altenburger généralisée est:

$$K = [P(N_{x+m}-N_\varrho) - C(M_{x+n}-M_\varrho)].$$

Pour un groupe d'assurés, la réserve mathématique totale sera calculée par la formule:

$$\sum C\,{}_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum C - \ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum P + \frac{1}{D_{x'}}\sum K. \qquad (62)$$

Cette formule de la méthode d'Altenburger généralisée est analogue à celles de l'assurance mixte et de l'assurance vie-entière. Les coefficients de la nouvelle méthode s'obtiennent dans toutes les assurances de capitaux en cas de décès en introduisant dans les coefficients de la méthode primitive d'Altenburger la différence $(CM_\varrho - PN_\varrho)$. P est la prime annuelle propre à la catégorie d'assurance.

En ce qui concerne l'application de la nouvelle méthode, nous voudrions souligner un point: Un des avantages connus de la méthode d'Altenburger est qu'elle permet de calculer, sans distinction de catégorie, toutes les assurances mixtes, assurances temporaires au décès et vie-entière ayant le même âge x' à l'inventaire. Cet avantage existe également dans la méthode d'Altenburger généralisée. En effet, en faisant la transformation $R \rightarrow P$, tout se passe comme si nous remplacions chaque contrat du portefeuille par un contrat d'assurance temporaire au décès ayant ϱ pour échéance, la prime due restant P. L'expression formée par les deux premiers termes de droite de la formule d'Altenburger généralisée donne les réserves mathématiques de ces contrats. Pour ramener ces réserves aux réserves mathématiques du groupe considéré, il faut leur apporter la correction résultant du troisième

terme de la formule d'Altenburger généralisée. Le groupement des polices se fait par âges x' à l'inventaire; le calcul des nouveaux coefficients de même que les autres opérations se font aisément.

4° Assurances de capitaux différés

a) sans contre-assurance:

Dans la formule habituelle de la réserve mathématique du capital différé:

$$C\,{}_tV_x({}_nE_x) = C\frac{D_{x+n}}{D_{x'}} - P\frac{(N_{x'}-N_{x+n})}{D_{x'}},$$

la valeur actuelle des engagements de l'assureur se présente directement sous la forme d'un produit de $\frac{1}{D_{x'}}$ par une quantité CD_{x+n} qui ne dépend pas de l'âge à l'inventaire; il n'y a pas lieu de la transformer. En revanche, nous transformons la valeur actuelle des primes futures de manière à introduire la rente temporaire $\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}$, en écrivant:

$$C\,{}_tV_x({}_nE_x) = \frac{1}{D_{x'}}CD_{x+n} - P\frac{(N_{x'}-N_\varrho)-(N_{x+m}-N_\varrho)}{D_{x'}}, \qquad (63)$$

$$C\,{}_tV_x({}_nE_x) = -P\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} + \frac{1}{D_{x'}}\left[CD_{x+n}+P(N_{x+n}-N_\varrho)\right], \qquad (64)$$

ou bien, en introduisant le coefficient constant K:

$$K = \left[CD_{x+n}+P(N_{x+n}-N_\varrho)\right],$$

indépendant de l'âge à l'inventaire,

$$C\,{}_tV_x({}_nE_x) = -P\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} + \frac{1}{D_{x'}}K. \qquad (65)$$

Pour un groupe de polices ayant le même âge à l'inventaire, la réserve mathématique totale sera donnée par la formule:

$$\sum C\,{}_tV_x({}_nE_x) = -\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum P + \frac{1}{D_{x'}}\sum K. \qquad (66)$$

Le calcul par cette méthode généralisée d'Altenburger est aisé.

b) avec contre-assurance:

Suivant le même principe de transformation, la réserve mathématique de cette assurance s'écrit:

$$
\begin{aligned}
{}_tV_x({}_nE_x^{(c)}) = C\,\frac{D_{x+n}}{D_{x'}} + tY''\,\frac{(M_{x'}-M_\varrho)-(M_{x+n}-M_\varrho)}{D_{x'}} \\
+ Y''\,\frac{[R_{x'}-R_\varrho-(\varrho-x')M_\varrho]-[R_{x+n}-R_\varrho-(\varrho-x')M_\varrho]+(n-t)M_{x+n}}{D_{x'}} \\
- Y\,\frac{(N_{x'}-N_\varrho)-(N_{x+n}-N_\varrho)}{D_{x'}}\,. \qquad (67)
\end{aligned}
$$

En posant:

$$
K = \left[Y(N_{x+n}-N_\varrho) - Y''\left\{R_{x+n}-R_\varrho-(\varrho-x-n)\,M_\varrho+n(M_{x+n}-M_\varrho)\right\}+CD_{x+n}\right],
$$

nous obtenons:

$$
{}_tV_x({}_nE_x^{(c)}) = tY''\,A^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|} + Y''(IA)^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|} - Y\,\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} + \frac{1}{D_{x'}}\,K; \quad (68)
$$

d'où nous tirons immédiatement la réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés:

$$
\sum {}_tV_x({}_nE_x^{(c)}) = A^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum tY'' + (IA)^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum Y'' - \ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum Y + \frac{1}{D_{x'}}\sum K. \qquad (69)
$$

Le calcul du coefficient K semble au premier abord devoir être assez long. Cependant, si l'on établit, au préalable, les nombres de commutation,

$$
N_{x:\overline{\varrho-x}|} = \sum_{x}^{\varrho-1} D_x = N_x - N_\varrho,
$$

$$
M_{x:\overline{\varrho-x}|} = \sum_{x}^{\varrho-1} C_x = M_x - M_\varrho,
$$

$$
R_{x:\overline{\varrho-x}|} = \sum_{x}^{\varrho-1} M_{x:\overline{\varrho-x}|} = R_x - R_\varrho - (\varrho-x)M_\varrho,
$$

on constate qu'il n'en est rien.

On saisit bien la signification des trois premiers termes de la formule de la réserve de chaque police et celle des différentes parties du coefficient K en les interprétant séparément.

5° Assurances à terme fixe en cours

La généralisation de la méthode d'Altenburger est ici aisée. Seul le terme concernant les primes est transformé. La réserve mathématique s'écrit après la transformation $R \rightarrow P$:

$$C\,{}_tV_x^{(n)} = C\frac{v^{x+n}}{v^{x'}} - P\frac{(N_{x'}-N_\varrho)-(N_{x+n}-N_\varrho)}{D_{x'}}, \qquad (70)$$

et puis, pour un groupe de polices:

$$\sum C\,{}_tV_x^{(n)} = \frac{1}{v^{x'}}\sum Cv^{x+n} - \ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum P + \frac{1}{D_{x'}}\sum P(N_{x+n}-N_\varrho). \qquad (71)$$

Cette formule ne comprend qu'un seul facteur viager $\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}$ dépendant de x'. Le coefficient se calcule rapidement de la même façon que celle que nous avons préconisée pour les assurances précédentes.

6° Assurances de rentes différées à primes annuelles

La réserve mathématique d'une rente différée à primes annuelles s'exprime après la transformation $R \rightarrow P$:

$${}_tV_{x(n|}\ddot{a}_x) = r\frac{N_{x+n}}{D_{x'}} - P\frac{(N_{x'}-N_\varrho)-(N_{x+n}-N_\varrho)}{D_{x'}} \text{ tant que } t<n, \qquad (72)$$

$${}_tV_{x(n}\ddot{a}_x) = -P\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}} + \frac{1}{D_{x'}}[P(N_{x+n}-N_\varrho)+rN_{x+n}]. \qquad (73)$$

Pour un groupe de polices, il vient, en posant

$$K = [P(N_{x+n}-N_\varrho)+rN_{x+n})]:$$

$$\sum {}_tV_{x(n|}\ddot{a}_x) = -\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum P + \frac{1}{D_{x'}}\sum K. \qquad (74)$$

Cette formule est tout à fait semblable à la formule (66) obtenue pour les assurances de capitaux différés.

En ce qui concerne l'assurance mixte sur deux têtes au premier decès, la formule de la réserve mathematique par la méthode d'Altenburger generalisée est analogue à celle de l'assurance mixte sur une tête, avec un âge central ξ et les nombres de commutation sur deux têtes.

En résumé, nous voyons que, pour toutes les formes d'assurances examinées, la transformation «rétrospectif-prospectif» nous a permis d'établir une nouvelle méthode generale, dont la methode d'Altenburger n'est qu'un cas particulier.

IV. Symétrie de la méthode U et de la méthode d'Altenburger généralisée

Pour établir la methode derivée de celle d'Altenburger, nous avons choisi comme âge correspondant de $\omega - 1$ un âge quelconque σ, inférieur à tous les âges d'entrée des polices. Puis, au moyen de la transformation «retrospectif-prospectif», nous avons généralise la methode d'Altenburger en introduisant un âge ϱ à l'échéance, superieur à tous les âges d'échéances des polices.

La methode habituelle d'Altenburger offre une certaine symétrie avec sa methode dérivée, méthode U. Mais, la symetrie n'est pas parfaite. Cela tient: d'une part, à ce que l'âge $\omega - 1$, qui joue un rôle preponderant dans la methode d'Altenburger, est un âge très particulier, où tous les nombres de commutation s'annulent: l'âge σ qui lui correspond dans la methode U n'a pas ces propriétés spéciales. D'autre part, la symetrie par rapport à l'âge x' fait défaut dans diverses formes d'assurance, ainsi dans l'assurance mixte, dans le capital differé, dans la terme-fixe.

Dans la methode d'Altenburger généralisée, l'âge final ϱ correspond à l'âge initial σ de la méthode U. Ce sont en quelque sorte deux âges correspondants quelconques de la transformation $R \rightarrow P$, c'est-à-dire sans proprietes particulières. Ils ne conduisent à aucune dissymetrie dans les formules des reserves mathématiques. Si l'assurance considérée est également symetrique par rapport à l'âge x', rien ne s'oppose donc à ce que la symetrie entre la formule des reserves mathématiques de la methode U et celle de la methode d'Altenburger generalisée soit parfaite. C'est ce que nous allons constater en considérant un groupe

d'assurances temporaires en cas de décès à primes annuelles payables pendant la durée entière du contrat, toutes de même âge x' à l'inventaire.

D'après la méthode U, les réserves mathématiques sont:

$$\sum C_t V^1_{x:\overline{n}|} = {}_{\sigma}\ddot{s}_{x':\overline{x'-\sigma}|} \sum P - {}_{x'-\sigma}S_{\sigma} \sum C - \frac{1}{D_{x'}} \sum \overline{K},$$

et d'après la méthode d'Altenburger généralisée:

$$\sum C_t V^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum C - \ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum P + \frac{1}{D_{x'}} \sum K.$$

La valeur finale des primes capitalisées viagèrement, ${}_{\sigma}\ddot{s}_{x':\overline{x'-\sigma}|} \sum P$, de la méthode U, correspond à la valeur actuelle des primes, $\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum P$, de la méthode d'Altenburger généralisée; la valeur finale du risque total, ${}_{x'-\sigma}S_{\sigma} \sum C$, correspond à la valeur actuelle des engagements futurs de l'assureur, $A^1_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum C$.

Les coefficients $\overline{K} = [P(N_{\sigma} - N_x) - C(M_{\sigma} - M_x)]$,

et $K = [P(N_{x+n} - N_{\varrho}) - C(M_{x+n} - M_{\varrho})]$

se correspondent, le terme $P(N_{\sigma} - N_x)$ correspondant à $P(N_{x-n} - N_{\varrho})$ et le terme $C(M_{\sigma} - M_x)$ à $C(M_{x-n} - M_{\varrho})$. La symétrie est ainsi parfaite.

En revanche, si l'assurance considérée est dissymétrique par rapport à l'âge x' à l'inventaire, on ne peut pas s'attendre à ce que la symétrie entre la formule de la méthode U et celle de la méthode d'Altenburger généralisée soit parfaite.

Ainsi, pour les capitaux différés sans contre-assurance, les réserves mathématiques sont données dans la méthode U par la formule:

$$\sum C_t V_x({}_nE_x) = {}_{\sigma}\ddot{s}_{x':\overline{x'-\sigma}|} \sum P - \frac{1}{D_{x'}} \sum \overline{K},$$

$$\text{où } \overline{K} = P(N_{\sigma} - N_x).$$

Dans la méthode d'Altenburger généralisée, nous avons:

$$\sum C_t V_x({}_nE_x) = -\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum P + \frac{1}{D_{x'}} \sum K,$$

$$\text{où } K = [CD_{x+n} + P(N_{x+n} - N_{\varrho})].$$

Nous reconnaissons immédiatement la symétrie entre les termes $\ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}\sum P$ et $\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|}\sum P$ ainsi que, dans les coefficients $\overline{K}$ et K, entre $P(N_\sigma - N_x)$ et $P(N_{x+n} - N_\varrho)$. Mais nous avons une dissymétrie en ce sens que K contient en plus le terme CD_{x+n}, expression de la dissymétrie du capital différé par rapport à l'âge x'.

Nous avons choisi l'âge initial σ inférieur à tous les âges d'entrée des assurances du groupe considéré et l'âge final ϱ supérieur à tous les âges-termes. Nos formules resteraient cependant valables tant que $\sigma < x'$ et $\varrho > x'$, où x' désigne l'âge à l'inventaire. Mais cette extension du champ pour σ et ϱ n'offre guère d'avantage et l'on y perd la possibilité de l'interprétation simple des opérations, que nous avons signalée plus haut.

Les formules de la méthode U contiennent les expressions $\ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}$, ${}_{|x'-\sigma}S_\sigma$, ${}_{|x'-\sigma}(IS)_\sigma$, etc., dont le calcul au moyen des nombres de commutation usuels:

$$\ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} = \frac{N_\sigma - N_{x'}}{D_{x'}}$$

$${}_{|x'-\sigma}S_\sigma = \frac{M_\sigma - M_{x'}}{D_{x'}}$$

$${}_{|x'-\sigma}(IS)_\sigma = \frac{R_\sigma - R_{x'} - (x'-\sigma)M_{x'}}{D_{x'}}$$

est relativement long. Il semble que la méthode U soit désavantagée par rapport à la méthode d'Altenburger ordinaire ou même par rapport à la méthode d'Altenburger généralisée lorsqu'on travaille à l'aide de tables de commutation qui s'arrêtent à l'âge ϱ.

En réalité, il n'en est rien. Il suffit d'établir, au préalable, une table de commutation adaptée à la méthode rétrospective. On y arrive facilement en additionnant les D_x ou les C_x à partir du début de la table, de l'âge le plus petit envisagé σ, comme nous le faisons dans le tableau ci-après. Cela revient à définir de nouveaux nombres de commutation N_x^* et M_x^* par les formules:

$$N_x^* = \sum_{\tau=\sigma}^{\tau=x-1} D_\tau, \quad \text{avec} \quad N_{15}^* = 0,$$

$$M_x^* = \sum_{\tau=\sigma}^{\tau=x-1} C_\tau, \quad \text{avec} \quad M_{15}^* = 0.$$

On obtient alors très rapidement la valeur finale de la rente ou la valeur finale du risque:

$$\ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} = \frac{N^*_{x'}}{D_{x'}}, \tag{75}$$

$$|_{x'-\sigma}S_\sigma = \frac{M^*_{x'}}{D_{x'}}. \tag{76}$$

Les formules sont analogues à celles de la rente $\ddot{a}_{x'}$ ou du capital en cas de décès $A_{x'}$ calculés à l'aide d'une table de commutation ordinaire, symétriques aussi à celles de la rente $\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}}$ ou de l'assurance temporaire $A_{x':\overline{\varrho-x'}}$ qui interviennent dans la méthode d'Altenburger généralisée lorsqu'on emploie une table de commutation s'arrêtant à l'âge ϱ.

Nous avons défini de même dans le tableau ci-après:

$$S^*_x = \sum_{\tau=\sigma}^{\tau=x-1} N^*_{\tau+1}, \quad \text{avec} \quad S^*_{15} = 0,$$

$$R^*_x = \sum_{\tau=\sigma}^{\tau=x-1} M^*_{\tau+1}, \quad \text{avec} \quad R^*_{15} = 0.$$

On a alors:

$$|_{x'-\sigma}(IS)_\sigma = \frac{(x'-\sigma)\,M^*_{x'} - R^*_{x'-1}}{D_{x'}}. \tag{77}$$

Ainsi, la méthode *U* ne le cède en rien, en précision et en rapidité, à la méthode d'Altenburger habituelle ou à la méthode d'Altenburger généralisée.

V. Critique de la méthode d'Altenburger et de la méthode U

Après l'étude de certaines combinaisons, nous pouvons constater que, pour les assurances vie-entière, les temporaires au décès et les mixtes, la méthode d'Altenburger et sa méthode dérivée offrent un grand avantage, celui de permettre le calcul en bloc, sans distinction d'assurances, du total des réserves mathématiques relatives aux polices pour lesquelles les âges à l'inventaire sont les mêmes. Le nombre des

Tableau des nombres de commutation pour

x	D_x	N_x^*	S_x^*	C_x	M_x^*	R_x^*
15	65 489	0	0	59	0	0
16	63 833	65 489	65 489	66	59	59
17	62 211	129 322	194 811	74	125	184
18	60 620	191 533	386 344	81	199	383
19	59 060	252 153	638 497	88	280	663
20	57 531	311 213	949 710	92	368	1 031
21	56 037	368 744	1 318 454	94	460	1 491
22	54 576	424 781	1 743 235	95	554	2 045
23	53 151	479 357	2 222 592	96	649	2 694
24	51 758	532 508	2 755 100	95	745	3 439
25	50 401	584 266	3 339 366	94	840	4 279
26	49 077	634 667	3 974 033	93	934	5 213
27	47 787	683 744	4 657 777	91	1 027	6 240
28	46 531	731 531	5 389 308	89	1 118	7 358
29	45 306	778 062	6 167 370	88	1 207	8 565
30	44 113	823 368	6 990 738	87	1 295	9 860
31	42 950	867 481	7 858 219	86	1 382	11 242
32	41 816	910 431	8 768 650	86	1 468	12 710
33	40 711	952 247	9 720 897	86	1 554	14 264
34	39 631	992 958	10 713 855	87	1 640	15 904
35	38 577	1 032 589	11 746 444	90	1 727	17 631
36	37 547	1 071 166	12 817 610	92	1 817	19 448
37	36 539	1 108 713	13 926 323	95	1 909	21 357
38	35 552	1 145 252	15 071 575	99	2 004	23 361
39	34 586	1 180 804	16 252 379	104	2 103	25 464
40	33 639	1 215 390	17 467 769	108	2 207	27 671
41	32 710	1 249 029	18 716 798	113	2 315	29 986
42	31 799	1 281 739	19 998 537	118	2 428	32 414
43	30 905	1 313 538	21 312 075	125	2 546	34 960
44	30 027	1 344 443	22 656 518	132	2 671	37 631
45	29 162	1 374 470	24 030 988	141	2 803	40 434
46	28 310	1 403 632	25 434 620	151	2 944	43 378
47	27 468	1 431 942	26 866 562	162	3 095	46 473
48	26 636	1 459 410	28 325 972	173	3 257	49 730
49	25 814	1 486 046	29 812 018	186	3 430	53 160

les calculs rétrospectifs, SM 1948/53 2 1/2 %

x	D_x	N_x^*	S_x^*	C_x	M_x^*	R_x^*
50	24 997,7	1 511 860	31 323 878	200,1	3 616	56 776
51	24 187,9	1 536 857,7	32 860 735,7	215,2	3 816,1	60 592,1
52	23 382,8	1 561 045,6	34 421 781,3	230,5	4 031,3	64 623,4
53	22 582,1	1 584 428,4	36 006 209,7	245,7	4 261,8	68 885,2
54	21 785,6	1 607 010,5	37 613 220,2	260,5	4 507,5	73 392,7
55	20 993,8	1 628 796,1	39 242 016,3	274,0	4 768,0	78 160,7
56	20 207,8	1 649 789,9	40 891 806,2	286,4	5 042,0	83 202,7
57	19 428,6	1 669 997,7	42 561 803,9	298,7	5 328,4	88 531,1
58	18 655,9	1 689 426,3	44 251 230,2	311,7	5 627,1	94 158,2
59	17 889,2	1 708 082,2	45 959 312,4	325,9	5 938,8	100 097,0
60	17 127,0	1 725 971,4	47 685 283,8	339,9	6 264,7	106 361,7
61	16 369,3	1 743 098,4	49 428 382,2	353,1	6 604,6	112 966,3
62	15 617,0	1 759 467,7	51 187 849,9	366,6	6 957,7	119 924,0
63	14 869,5	1 775 084,7	52 962 934,6	381,1	7 324,3	127 248,3
64	14 125,7	1 789 954,2	54 752 888,8	397,2	7 705,4	134 953,7
65	13 384,0	1 804 079,9	56 556 968,7	413,7	8 102,6	143 056,3
66	12 643,8	1 817 463,9	58 374 432,6	429,1	8 516,3	151 572,6
67	11 906,4	1 830 107,7	60 204 540,3	443,8	8 945,4	160 518,0
68	11 172,2	1 842 014,1	62 046 554,4	457,7	9 389,2	169 907,2
69	10 442,0	1 853 186,3	63 899 740,7	470,7	9 846,9	179 754,1
70	9 716,6	1 863 628,3	65 763 369,0	481,2	10 317,6	190 071,7
71	8 998,4	1 873 344,9	67 636 713,9	488,2	10 798,8	200 870,5
72	8 290,7	1 882 343,3	69 519 057,2	492,6	11 287,0	212 157,5
73	7 595,8	1 890 634,0	71 409 691,2	494,8	11 779,6	223 937,1
74	6 915,8	1 898 229,8	73 307 921,0	494,5	12 274,4	236 211,5
75	6 252,6	1 905 145,6	75 213 066,6	491,0	12 768,9	248 980,4
76	5 609,1	1 911 398,2	77 124 464,8	482,8	13 259,9	262 240,3
77	4 989,6	1 917 007,3	79 041 472,1	470,1	13 742,7	275 983,0
78	4 397,7	1 921 996,9	80 963 469,0	453,2	14 212,8	290 195,8
79	3 837,2	1 926 394,6	82 889 863,6	432,2	14 666,0	304 861,8
80	3 311,4	1 930 231,8	84 820 095,4	406,1	15 098,2	319 960,0
81	2 824,6	1 933 543,2	86 753 638,6	375,6	15 504,3	335 464,3
82	2 380,1	1 936 367,8	88 690 006,4	344,3	15 879,9	351 344,2
83	1 977,7	1 938 747,9	90 628 754,3	311,3	16 224,2	367 568,4
84	1 618,2	1 940 725,6	92 569 479,9	276,5	16 535,5	384 103,9
85	1 302,3	1 942 343,8	94 511 823,7	240,8	16 812,0	400 915,9

primes à verser et la durée restant à courir jusqu'à l'échéance sont sans importance dans l'application des deux méthodes.

Dans les formules des réserves de ces deux méthodes, on distingue deux parties principales: La première se rapporte aux totaux des capitaux assurés et des primes annuelles, multipliés respectivement par la prime unique et par la rente viagère pour la méthode d'Altenburger ou bien par la valeur finale de la rente et par la valeur finale du risque pour la méthode U. La deuxième partie concerne les nombres auxiliaires que l'on calcule au début de chaque contrat et que l'on additionne lors des inventaires successifs. Le travail est ainsi considérablement simplifié.

Toutefois, on prétend que la méthode d'Altenburger présente quelques défauts. Par exemple, au moment de la libération du paiement des primes ou de la transformation du contrat, on peut omettre de sortir la police des registres et de l'y réintégrer immédiatement en tenant compte des nouveaux éléments dus à la transformation. On court donc le risque de calculer les réserves mathématiques sans tenir compte du changement des conditions et d'obtenir des résultats incorrects. A chaque changement survenu, il faut calculer les nouveaux nombres auxiliaires, ce qui présente également un inconvénient. Tout cela est valable aussi pour la méthode U.

Mais, en regard des grands avantages qu'offrent les deux méthodes, les inconvénients signalés restent négligeables. Quant à la précision des calculs effectués, on peut dire que les deux méthodes sont très bonnes. Elles sont suffisamment rapides. Il peut se produire des erreurs par suite de l'oubli de l'inscription des sorties et des entrées, comme nous venons de le signaler; mais cela est vrai pour toutes les autres méthodes aussi. On voit que la méthode d'Altenburger et la méthode dérivée ont les mêmes avantages et inconvénients. Les deux sont exactes au point de vue mathématique. Dans la pratique, on peut adopter indifféremment l'une ou l'autre méthode.

Il va de soi que nous pouvons étendre toutes les remarques formulées ci-dessus à la méthode d'Altenburger généralisée. Pour rendre rapide son application, on peut établir une table de nombres de commutation s'arrêtant à l'âge final ϱ.

Chapitre II

Recherche de la méthode dérivée de la méthode de Whiting

I. La méthode de Whiting

Actuaire anglais, Whiting a fondé sa méthode sur la formule prospective des réserves mathématiques. Elle se confond dans son essence avec la méthode d'Altenburger. Si, cependant, Altenburger exprimait son coefficient d'après l'âge de l'assuré à l'expiration du contrat, Whiting le fixe d'après l'âge à l'origine du contrat. L'application de la méthode est facile et générale. Nous allons montrer brièvement ce qui est l'essentiel de la méthode en nous basant sur deux combinaisons d'assurance. Nous écrirons la lettre P avec les indices convenables pour distinguer les primes annuelles des différentes catégories d'assurance.

1° Assurances mixtes

Nous désignons par $P_{x:\overline{m}|}$ la prime annuelle d'une assurance mixte payable pendant m années, m étant inférieur ou égal à n.

Transformons d'abord le coefficient d'Altenburger:

$$K = (P_{x:\overline{m}|} N_{x+m} + C D_{x+n} - C M_{x+n})$$

au moyen de la formule de la prime annuelle:

$$P_{x:\overline{m}|} = C \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}},$$

en $$K = (P_{x:\overline{m}|} N_x - C M_x),$$

et $$K = (P_{x:\overline{m}|} - P_x) N_x,$$

où P_x désigne la prime annuelle de l'assurance vie-entière.

La réserve mathématique selon la méthode de Whiting s'écrit donc:

$$C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = C A_{x'} - P_{x:m}\,\ddot{a}_{x'} + \frac{1}{D_{x'}} N_x (P_{x:\overline{m}|} - P_x). \qquad (78)$$

Le coefficient de Whiting est $K = N_x(P_{x:\overline{m}|} - P_x)$.

Pour un groupe de polices, la réserve mathématique totale est donnée par la formule:

$$\sum {}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x'} \sum C - \ddot{a}_{x'} \sum P_{x:\overline{m}|} + \frac{1}{D_{x'}} \sum K. \qquad (79)$$

Lorsqu'on applique cette méthode, on a besoin, pour chaque contrat, des primes annuelles de l'assurance mixte et de l'assurance vie-entière. En vue de faciliter le travail, on peut préparer des tableaux donnant la différence $(P_{x:\overline{m}|} - P_x)$.

La méthode de Whiting généralisée s'obtient en transformant le coefficient de la méthode d'Altenburger généralisée comme il suit:

$$K = [P_{x:\overline{m}|}(N_{x+m} - N_\varrho) + CD_{x+n} - C(M_{x+n} - M_\varrho)].$$

En tenant compte de:

$$P_{x:\overline{m}|} = C\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \quad \text{et de} \quad P^1_{x:\overline{\varrho-x}|} = \frac{M_x - M_\varrho}{N_x - N_\varrho},$$

on trouve: $$K = (N_x - N_\varrho)(P_{x:\overline{m}|} - P^1_{x:\overline{\varrho-x}|}),$$

où $P^1_{x:\overline{\varrho-x}|}$ est la prime annuelle de l'assurance temporaire au décès. La formule de la méthode de Whiting généralisée sera alors:

$$\sum {}_tV_{x:\overline{n}|} = A^1_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum C - \ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum P_{x:\overline{m}|} + \frac{1}{D_{x'}} \sum K. \qquad (80)$$

Dans le coefficient, la prime de l'assurance temporaire au décès se calcule pour chaque police selon l'âge ϱ à l'échéance introduit au début de la conclusion des affaires. ϱ est constant et supérieur à tous les âges d'entrée.

Pour les assurances temporaires au décès, on obtient une formule analogue à celle de l'assurance mixte avec des coefficients appropriés. En effet, après la transformation du coefficient d'Altenburger

$$K = (P^1_{x:\overline{m}|} N_{x+m} - CM_{x+n})$$

en: $$K = CN_x(P^1_{x:\overline{m}|} - P_x),$$

on peut écrire la formule de la réserve mathématique d'un groupe d'assurés d'après la méthode de Whiting:

$$\sum {}_tV^1_{x:\overline{n}|} = A_{x'} \sum C - \ddot{a}_{x'} \sum P^1_{x:\overline{m}|} + \frac{1}{D_{x'}} \sum CN_x(P^1_{x:\overline{m}|} - P_x),$$

et puis, en transformant le coefficient de la méthode d'Altenburger généralisée, on aura celle de la méthode de Whiting généralisée:

$$\sum {}_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum C - \ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum P^{1}_{x:\overline{m}|} + \frac{1}{D_{x'}} \sum (N_x - N_\varrho)\,(P^{1}_{x:\overline{m}|} - P^{1}_{x:\overline{\varrho-x'}|}).$$

2° Assurances de capitaux différés sans contre-assurance

Exprimons le coefficient d'Altenburger:

$$K = [CD_{x+n} + P({}_nE_x)\, N_{x+n}]$$

en fonction des nombres de commutation à l'âge d'entrée x et d'autres quantités, au moyen de la formule de la prime:

$$P({}_nE_x) = \frac{CD_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \quad \text{ou} \quad P({}_nE_x)\, N_x - P({}_nE_x)\, N_{x+n} = CD_{x+n}.$$

Le coefficient d'Altenburger s'écrit alors:

$$K = [CD_{x+n} + P({}_nE_x)\, N_{x+n}] \quad \text{et} \quad K = P({}_nE_x)\, N_x,$$

c'est-à-dire en fonction de N_x et de $P({}_nE_x)$. Donc, la réserve mathématique d'après la méthode de Whiting devient:

$$C\,{}_tV_x({}_nE_x) = -P({}_nE_x)\,\ddot{a}_{x'} + \frac{1}{D_{x'}} K, \tag{81}$$

et pour un groupe d'assurés:

$$\sum C\,{}_tV_x({}_nE_x) = -\ddot{a}_{x'} \sum P({}_nE_x) + \frac{1}{D_{x'}} \sum K. \tag{82}$$

Le coefficient de Whiting $K = P({}_nE_x)\, N_x$ est très simple et ne comprend qu'une prime annuelle.

Après avoir transformé le coefficient d'Altenburger généralisé

$$K = [CD_{x+n} + P({}_nE_x)\,(N_{x+n} - N_\varrho)]$$

en fonction de l'âge x, nous pourrons écrire la formule de la méthode de Whiting généralisée:

$$\sum C\,{}_tV_x({}_nE_x) = -\ddot{a}_{x':\overline{\varrho-x'}|} \sum P + \frac{1}{D_{x'}} \sum P({}_nE_x)\,(N_x - N).$$

La méthode de Whiting s'applique à toutes les formes d'assurance à l'étude, elle est donc une méthode générale. Comme la méthode d'Altenburger, elle groupe les polices d'un portefeuille d'après l'âge x' atteint au moment de l'inventaire et permet de calculer la réserve mathématique en fonction d'éléments prospectifs $A_{x'}$, $\ddot{a}_{x'}$, $(IA)_{x'}$, $\frac{1}{v^{x'}}$, $A_{\xi'\xi'}$, $\ddot{a}_{\xi'\xi'}$, etc., et de $\frac{1}{D_{x'}}$, $\frac{1}{D_{\xi'\xi'}}$, fonctions de l'âge x' à l'inventaire, multipliés respectivement par des quantités caractéristiques de la police, C, P, etc., et par le coefficient de Whiting K, s'il s'agit d'une police ou par les sommes de ces quantités s'il s'agit d'un groupe de polices. Il en est de même de la méthode de Whiting généralisée.

De même que les méthodes précédentes, la méthode de Whiting et sa méthode généralisée sont mathématiquement exactes. Son emploi pratique ne présente aucune difficulté.

II. La méthode dérivée de la méthode de Whiting ou méthode $U^{(w)}$

La transformation «prospectif-rétrospectif» $(P \to R)$ nous a conduit à la méthode dérivée de celle d'Altenburger, la méthode U. Les coefficients $\overline{K}$ y sont exprimés à l'aide des nombres de commutation relatifs à l'âge d'entrée x. Comme la méthode de Whiting est exactement la méthode d'Altenburger avec le coefficient calculé en fonction de l'âge initial x, sa méthode dérivée sera, en raison de la transformation $P \to R$, la méthode U avec le coefficient calculé en fonction de l'âge-terme $x+n$. Nous appellerons cette méthode dérivée méthode $U^{(w)}$.

Nous allons établir la formule de la méthode $U^{(w)}$ pour quelques formes d'assurance.

1° Assurances mixtes

Partons du coefficient de la méthode U:

$$\overline{K} = P_{x:\overline{m}|}(N_a - N_x) - C(M_a - M_x).$$

La formule de la prime annuelle payable pendant m années:

$$P_{x:\overline{m}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

permet d'éliminer dans $\overline{K}$ les nombres de commutation relatifs à l'âge d'entrée x.

Nous obtenons:

$$\overline{K} = \left[(N_\sigma - N_{x+m})\, P_{x:\overline{m}|} - (N_\sigma - N_{x+n})\, P_{\sigma:\overline{(x+n)-\sigma}|}\right],$$

qui est le coefficient de la méthode $U^{(w)}$.

La réserve mathématique individuelle d'après cette nouvelle méthode dérivée s'écrira:

$$C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{m}|}\,\ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} - C\,{}_{|x'-\sigma}S_\sigma - \frac{1}{D_{x'}}\,\overline{K} \qquad (83)$$

et la réserve mathématique totale d'un groupe de polices:

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = \ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} \sum P_{x:\overline{m}|} - {}_{|x'-\sigma}S_\sigma \sum C - \frac{1}{D_{x'}} \sum \overline{K}. \qquad (84)$$

Si la durée du paiement des primes est de n années, le coefficient de la méthode $U^{(w)}$ sera:

$$\overline{K} = (N_\sigma - N_{x+n})\,(P_{x:\overline{n}|} - P_{\sigma:\overline{(x+n)-\sigma}|}).$$

Nous allons effectuer un exemple numérique.

Exemple numérique 5: Nous reprenons le groupe de polices donné dans l'exemple numérique 1, et nous allons calculer sa réserve mathématique totale, le 1er juillet 1960, par la méthode $U^{(w)}$. Nous choisissons $\sigma = 15$. Bases techniques: SM 1948/53 2½%.

Pol. N°	Naissance	Souscription	Echéance	C	$P_{x:\overline{n}|}$	$P_{\sigma:\overline{(x+n)-\sigma}|}$	$\frac{\overline{K}}{1000}$
1	1915	1940	1965	10 000	299,50	189,30	166 607
2	1915	1940	1965	5 000	149,75	94,65	83 304
3	1915	1940	1970	15 000	357,90	237,30	196 433
4	1915	1945	1970	12 000	364,56	189,84	284 583
5	1915	1945	1970	10 000	303,80	158,20	237 153
6	1915	1945	1975	5 000	122,40	67,77	94 290
7	1915	1945	1965	10 000	396,80	189,30	313 711
8	1915	1950	1965	10 000	561,00	189,30	561 958
9	1915	1950	1975	15 000	468,75	203,30	458 159
10	1915	1955	1975	20 000	829,80	271,06	964 369
				112 000	3 854,26	1 790,02	3 360 567

Le calcul de la réserve mathématique totale par la méthode $U^{(w)}$:

$$\sum {}_tV_{x:\overline{n}|} = \ddot{s}_{\sigma:\overline{45-\sigma}|} \sum P_{x:\overline{n}|} - {}_{|45-\sigma}S_\sigma \sum C - \frac{1}{D_{45}} \sum \overline{K}.$$

En valeurs numériques, nous aurons:

$$\sum {}_tV_{x:\overline{n}|} = 47{,}132 \cdot 1\,802{,}10 - 0{,}09\,612 \cdot 112\,000 - \frac{3\,360\,567}{29{,}162}$$

$$\ddot{s}_{\sigma:\overline{45-\sigma}|} = 47{,}132$$
$${}_{|45-\sigma}S_\sigma = 0{,}09\,612$$
$$D_{45} = 29\,162$$
$$\frac{\overline{K}}{1000} = 3\,360\,567$$

$$\sum {}_tV_{x:\overline{n}|} = \underline{55\,656}.$$

A titre de comparaison, nous donnons ci-dessous les résultats que nous avons obtenus par quelques méthodes exactes pour le même groupe de contrats.

Méthodes	Réserves mathématiques
Méthode individuelle	55 644
Méthode d'Altenburger	55 640
Méthode U	55 648
Méthode de Whiting	55 640
Méthode $U^{(w)}$	55 656

La nouvelle méthode est mathématiquement exacte. Les différences proviennent de l'approximation plus ou moins grande avec laquelle on calcule les primes et les nombres de commutation.

Pour l'assurance temporaire au décès, nous obtenons par le même procédé de calcul le coefficient de la méthode $U^{(w)}$:

$$\overline{K} = \left[(N_\sigma - N_{x+n})\, P^1_{x:\overline{m}|} - (N_\sigma - N_{x+n})\, P^1_{\sigma:\overline{(x+n)-\sigma}|}\right].$$

La réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés sera:

$$\sum {}_tV^1_{x:\overline{n}|} = \ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} \sum P^1_{x:\overline{m}|} - {}_{|x'-\sigma}S_\sigma \sum C - \frac{1}{D_{x'}} \sum \overline{K}.$$

2° Assurances de capitaux différés sans contre-assurance

Transformons le coefficient de la méthode U:

$$\overline{K} = P({}_nE_x)\,(N_\sigma - N_x)$$

au moyen de la formule de la prime annuelle, en:

$$\overline{K} = \left[P({}_nE_x)\,(N_\sigma - N_{x+n}) - CD_{x+n}\right],$$

fonction de l'âge-terme $x+n$. C'est le coefficient de la méthode $U^{(w)}$.

La réserve mathématique individuelle d'après la méthode $U^{(w)}$ s'écrit alors:

$$C\,{}_tV_x({}_nE_x) = P\,\ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} - \frac{1}{D_{x'}}\,\overline{K} \qquad (85)$$

et la réserve mathématique totale d'un groupe de contrats sera:

$$\sum C\,{}_tV_x({}_nE_x) = \ddot{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} \sum P({}_nE_x) - \frac{1}{D_{x'}} \sum \overline{K}\,. \qquad (86)$$

Au cours de l'étude de la symétrie entre la méthode U et celle d'Altenburger généralisée, nous avons relevé que, si l'assurance considérée est dissymétrique par rapport à l'âge x', la symétrie parfaite n'existe pas entre les formules des deux méthodes. Par contre, si l'assurance considérée est symétrique par rapport à l'âge x', on peut constater la symétrie parfaite.

Il en est de même de la symétrie entre la méthode $U^{(w)}$ et la méthode de Whiting généralisée. Pour cela, il suffit d'examiner la symétrie des coefficients des deux méthodes.

Considérons l'assurance temporaire au décès à primes annuelles payables pendant n années, et examinons la symétrie entre le coefficient de la méthode $U^{(w)}$:

$$\overline{K} = (N_\sigma - N_{x+n})\,(P^1_{x:\overline{n}|} - P^1_{\sigma:\overline{(x+n)-\sigma}|})$$

et celui de la méthode de Whiting généralisée:

$$K = (N_x - N_\varrho)\,(P^1_{x:\overline{n}|} - P^1_{x:\overline{\varrho-x}|})\,.$$

A l'âge initial σ correspond l'âge final ϱ; à l'âge-terme $x+n$ correspond l'âge x. La prime $P^1_{x:\overline{n}|}$ correspond à elle-même. A l'assurance temporaire ${}^1_{\sigma:\overline{(x+n)-\sigma}|}$ correspond ${}^1_{x:\overline{\varrho-x}|}$; à la prime $P^1_{\sigma:\overline{(x+n)-\sigma}|}$ correspond donc $P^1_{x:\overline{\varrho-x}|}$. Enfin, à la différence $(N_\sigma - N_{x+n})$ correspond $(N_x - N_\varrho)$. Ainsi, nous obtenons la symétrie parfaite entre les deux coefficients, par suite, entre la méthode $U^{(w)}$ et celle de Whiting généralisée.

En revanche, pour le capital différé, la symétrie entre le coefficient de la méthode $U^{(w)}$:

$$\overline{K} = [P({}_nE_x)\,(N_\sigma - N_{x+n}) - C\,D_{x+n}]$$

et celui de la méthode de Whiting généralisée:

$$K = P({}_nE_x)\,(N_x - N_\varrho)\,,$$

n'est pas parfaite, puisque le premier contient en plus le terme $C\,D_{x+n}$, seul terme de dissymétrie.

III. Critique de la méthode de Whiting et de la méthode $U^{(w)}$

Les avantages et les inconvénients que nous avons relevés dans la méthode d'Altenburger et dans sa méthode dérivée, apparaissent aussi dans ces deux méthodes. Pour celles-ci, on est amené à calculer, outre la prime de l'assurance, une deuxième prime annuelle. Cela ne représente aucune difficulté au point de vue pratique. Soit la méthode de Whiting, soit la méthode $U^{(w)}$, sont des méthodes exactes, comme celle d'Altenburger et sa méthode dérivée. Le degré de précision des calculs est tout à fait bon, si l'on se réfère aux exemples numériques effectués. Pour l'application, nous estimons que les deux méthodes se valent et que l'on peut adopter indifféremment l'une ou l'autre.

Chapitre III

Recherche de la méthode dérivée de la méthode de Lidstone

I. La méthode de Lidstone

Connue aussi sous le nom de Méthode *Z*, la méthode qu'exposa Lidstone dans le *Journal de l'Institut des Actuaires de Londres* (vol. XXXIV, page 61) groupe les polices ayant la même année d'échéance. Elle ne distingue pas entre les âges atteints à l'inventaire; pour le calcul des réserves mathématiques d'un groupe de polices, elle leur substitue un âge moyen. La réserve mathématique de chaque assurance s'exprime en fonction de la rente temporaire $\ddot{a}_{x':\overline{n'}|}$, x' désignant l'âge atteint à l'inventaire et n' la durée restant à courir. Ainsi, on a affaire à un problème dont la solution consiste à trouver un âge moyen en vue de substituer une rente moyenne à des rentes de même durée, mais reposant sur des têtes d'âges différents. L'ingéniosité de cette méthode réside, du reste, dans la façon de calculer l'âge moyen. Lidstone a fait remarquer que, si la table de mortalité est ajustée par la formule de Makeham, les engagements de l'assuré et ceux de l'assureur peuvent se développer, d'une manière générale, en séries convergentes de la forme:

$$\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\, c^{x'} + \lambda_2(n')\, c^{2x'} + \ldots + \lambda_t(n')\, c^{tx'} + \ldots. \qquad (87)$$

Les coefficients $\lambda_t(n')$ dépendent seulement de (n'), c'est-à-dire du nombre des primes annuelles à verser dès l'année x' de l'inventaire, soit de la durée restant à courir; ils sont donc indépendants de l'âge atteint x'. c est une des constantes de la formule de Makeham.

Si l'on conserve les deux premiers termes seulement du développement, en négligeant les suivants, l'erreur qu'on commet est petite. Lidstone a obtenu, par là, un développement limité. Pour la rente temporaire discontinue, on a le développement limité suivant:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \lambda_0(n) + \lambda_1(n)\, c^x, \qquad (88)$$

où $\lambda_0(n)$ et $\lambda_1(n)$ dépendent de la durée n, mais non pas de l'âge x. On l'appelle aussi le développement lidstonien de la rente. C'est une valeur approximative. Par conséquent, la méthode de Lidstone est une méthode d'approximation.

Dans la méthode de Lidstone, ce qui importe avant tout, c'est précisément ce développement limité. Il n'est pas indispensable, pour appliquer la méthode, que la table de mortalité soit ajustée selon la loi de Makeham. Du reste, si l'on s'est servi de celle-ci, c'est pour mieux présenter le développement en série des rentes et pour montrer que l'on peut négliger tous les termes, à l'exception des deux premiers. Or, pour calculer les réserves mathématiques, on peut utiliser une table quelconque, sans distinction du mode d'ajustement.

Nous allons exposer quelques points essentiels de la méthode de Lidstone pour certaines combinaisons usuelles, dans le dessein de mettre ensuite en évidence le parallélisme existant entre elle et sa méthode dérivée. Ajoutons tout de suite que la méthode de Lidstone est basée sur la formule prospective de la réserve mathématique et que l'âge moyen se calcule d'habitude à l'échéance des polices du groupe, puis, par soustraction de n', à l'inventaire.

1° Assurances mixtes

Pour un groupe d'assurés, on peut écrire la réserve mathématique en fonction de la rente temporaire:

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = \sum C - d\sum C\ddot{a}_{x':\overline{n'}|} - \sum P\ddot{a}_{x':\overline{n'}|}. \qquad (89)$$

Cette formule comprend des rentes afférentes à des âges divers, mais toutes de durée n'. Le calcul serait considérablement simplifié, si l'on pouvait remplacer les diverses rentes sous les deux signes $\sum$ par deux rentes moyennes, lesquelles correspondraient, bien entendu, à deux âges moyens ξ' et η'. Les équations suivantes devraient être satisfaites:

$$\ddot{a}_{\xi':\overline{n'}|}\sum C = \sum C\ddot{a}_{x':\overline{n'}|} \quad \text{et} \quad \ddot{a}_{\eta':\overline{n'}|}\sum P = \sum P\ddot{a}_{x':\overline{n'}|}.$$

En développement lidstonien, elles peuvent s'écrire:

$$[\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\,c^{\xi'}]\sum C = \sum C\,[\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\,c^{x'}]$$

et

$$[\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\,c^{\eta'}]\sum P = \sum P\,[\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\,c^{x'}].$$

Après simplification, il vient:

$$c^{\xi'} = \frac{\sum C\,c^{x'}}{\sum C} \quad \text{et} \quad c^{\eta'} = \frac{\sum P\,c^{x'}}{\sum P}.$$

Pour la commodité des calculs, on les met sous la forme que voici:

$$c^{\varrho'-55} = \frac{\sum C c^{x+n-55}}{\sum C} \quad \text{et} \quad c^{\varphi'-55} = \frac{\sum P c^{x+n-55}}{\sum P},$$

où nous avons posé $\varrho' = \xi' + n'$ et $\varphi' = \eta' + n'$. Il est facile de calculer ϱ' et φ' au moyen des logarithmes ou à l'aide d'une table des puissances de c.

Dans la pratique, on introduit pour chaque police les nombres auxiliaires $Z' = C c^{x-n-55}$ et $Z'' = P c^{x-n-55}$, que l'on nomme «les coefficients de Lidstone» relatifs respectivement au capital et à la prime. Z' et Z'' restent constants pendant toute la durée de l'assurance. On inscrit sur chaque carte technique ces nombres, d'où le nom donné à cette méthode: Méthode Z. Du reste, on se contente en général d'un seul de ces nombres, Z' ou Z''.

Nous obtenons en effet deux âges moyens différents: ξ' et η'. Le premier est l'âge moyen calculé sur les capitaux et le second l'âge moyen calculé sur les primes. L'écart existant entre eux est faible, de sorte qu'on peut éviter d'en introduire deux dans les calculs. Suivant que l'on adopte Z' ou Z'', les réserves mathématiques obtenues pour le groupe de polices n'ont pas exactement la même valeur. Moyennant une constante convenablement choisie, différente du c de Makeham, on peut essayer de trouver un seul âge moyen que l'on pourrait appliquer indifféremment aux primes et aux capitaux. Cette recherche, intéressante au point de vue théorique, s'avère inutile pour la pratique, car les calculs faits jusqu'ici montrent que, si l'on utilise un seul âge moyen, celui des capitaux par exemple, on arrive à des résultats satisfaisants. Le travail est plus aisé que si l'on voulait introduire dans les calculs un âge moyen unique intermédiaire.

Il existe une autre manière de calculer l'âge moyen: par l'introduction du taux instantané de mortalité. On obtient deux âges moyens différents, comme dans la méthode ci-dessus. Nous ne nous occuperons pas de l'examen de ce procédé, qui est traité dans plusieurs ouvrages.

La formule de la méthode de Lidstone, à l'aide de l'âge moyen ξ' se présente sous la forme suivante:

$$\sum C_t V_{x:\overline{n}|} = \sum C - \ddot{a}_{\xi':\overline{n}|}(d \sum C + \sum P). \qquad (90)$$

2° Assurances temporaires au décès

La prime unique de cette combinaison ne peut s'exprimer en fonction de la rente temporaire, comme dans l'assurance mixte. Il faut s'efforcer de trouver un autre moyen pour calculer l'âge moyen relatif aux capitaux. Dans la formule de la réserve mathématique d'un groupe d'assurés:

$$\sum C\,{}_tV^1_{x:\overline{n}|} = \sum C A^1_{x':\overline{n'}|} - \sum P\,\ddot{a}_{x':\overline{n'}|},$$

on peut écrire la prime unique sous la forme analytique suivante:

$$A^1_{x':\overline{n'}|} = \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} v^\tau\,{}_{\tau-1}|q_{x'}. \tag{91}$$

En exprimant la probabilité différée de décès ${}_{\tau-1}|q_{x'}$ sous la forme analytique de la loi de Makeham, nous aurons:

$${}_{\tau-1}|q_{x'} = {}_{\tau-1}p_{x'} - {}_\tau p_{x'} = s^{\tau-1} g^{c^{x'}(c^{\tau-1}-1)} - s^\tau g^{c^{x'}(c^\tau-1)}. \tag{92}$$

Dès lors, la prime unique devient, en prenant en considération le développement en série des exponentielles $g^{c^{x'}(c^{\tau-1}1)}$ et $g^{c^{x'}(c^\tau-1)}$:

$$A^1_{x':\overline{n'}|} = \sum_{\tau=1}^{\tau=n'}\sum_{p=0}^{p=\infty} v^\tau s^{\tau-1} \frac{c^{px'}(c^{\tau-1}-1)^p}{p!} \operatorname{Log}^p g - \sum_{\tau=1}^{\tau=n'}\sum_{p=0}^{p=\infty} v^\tau s^\tau \frac{c^{px'}(c^\tau-1)^p}{p!} \operatorname{Log}^p g. \tag{93}$$

Si l'on prend seulement les deux premiers termes dans les séries:

$$A^1_{x':\overline{n'}|} = \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} v^\tau s^{\tau-1}\left[1 + c^{x'}(c^{\tau-1}-1)\operatorname{Log} g\right] - \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} v^\tau s^\tau \left[1 + c^{x'}(c^\tau-1)\operatorname{Log} g\right]. \tag{94}$$

Enfin, nous en tirons le développement lidstonien:

$$A^1_{x':\overline{n'}|} = \lambda_0(n') + \lambda_1(n')\,c^{x'} \tag{95}$$

après avoir posé:

$$\lambda_0(n') = \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} v^\tau (s^{\tau-1} - s^\tau)$$

$$\lambda_1(n') = \operatorname{Log} g \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} v^\tau \left[(c^{\tau-1}-1)s^{\tau-1} - (c^\tau - 1)s^\tau\right].$$

Le développement lidstonien de la prime unique obtenu, le calcul de l'âge moyen sur les capitaux se poursuit sans difficulté. On a d'abord:

$$\left[\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\,c^{\xi'}\right]\sum C = \sum C\left[\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\,c^{x'}\right],$$

où $\lambda_0(n')$ et $\lambda_1(n')$ sont indépendants de l'âge x'. On trouve la relation suivante:

$$c^{\xi'}\sum C = \sum C c^{x'}$$

et pour les primes annuelles, on aura:

$$c^{n'} \sum P = \sum P c^{x'}.$$

Puis on achève facilement le calcul des âges moyens comme dans le cas précédent. La formule de départ s'écrira donc:

$$\sum C_t V^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{\xi':\overline{n'}|} \sum C - \ddot{a}_{\eta':\overline{n'}|} \sum P. \qquad (96)$$

Cependant, l'un ou l'autre de ces âges moyens pourra représenter l'âge moyen unique, et cela avec une approximation satisfaisante.

3° Assurances de capitaux différés

a) sans contre-assurance:

La réserve mathématique totale d'un groupe de polices de même échéance est donnée par la formule:

$$\sum C_t V_{x\,({}_{n'}E_x)} = \sum C_{n'} E_{x'} - \sum P \ddot{a}_{x':\overline{n'}|}.$$

La prime unique de cette assurance peut s'exprimer en fonction de la probabilité temporaire de vie:

$$\begin{aligned} {}_{n'}E_{x'} &= v^{n'}\, {}_{n'}p_{x'}, \\ {}_{n'}E_{x'} &= v^{n'} s^{n'} g^{c^{x'}(c^{n'}-1)}. \end{aligned} \qquad (97)$$

En développant l'exponentielle en série, cette relation peut s'écrire aussi:

$${}_{n'}E_{x'} = v^{n'} s^{n'} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{c^{px'}(c^{n'}-1)^p}{p!} \mathrm{Log}^p g. \qquad (98)$$

Si l'on ne retient que deux termes dans la sommation, on a:

$${}_{n'}E_{x'} = v^{n'} s^{n'} [1 + c^{x'}(c^{n'}-1) \mathrm{Log}\, g]; \qquad (99)$$

d'où l'on tire le développement lidstonien:

$$\begin{aligned} {}_{n'}E_{x'} &= \lambda_0(n') + \lambda_1(n')\, c^{x'}, \qquad (100) \\ \text{où: } \lambda_0(n') &= v^{n'} s^{n'} \\ \lambda_1(n') &= v^{n'} s^{n'} (c^{n'}-1) \mathrm{Log}\, g. \end{aligned}$$

On pourra poser alors:

$$[\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\, c^{\xi'}] \sum C = \sum C [\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\, c^{x'}].$$

Cette relation permet de trouver l'âge moyen relatif aux capitaux:

$$c^{\xi'} \sum C = \sum C c^{x'}$$

et pour les primes annuelles, on aura:

$$c^{\eta'} \sum P = \sum P c^{x'}.$$

Finalement, la formule de la réserve mathématique sera:

$$\sum C_t V_x({}_nE_x) = {}_{n'}E_{\xi'} \sum C - \ddot{a}_{\eta':\overline{n'}|} \sum P. \qquad (101)$$

L'utilisation d'un seul âge moyen peut fournir, comme dans les autres assurances, une approximation satisfaisante.

b) avec contre-assurance:

La formule prospective de la réserve mathématique relative à cette assurance exige le calcul de quatre âges moyens:

$$\sum C_t V_x({}_nE_x^{(c)}) = \sum C_{n'}E_{x'} + \sum tY'' A^1_{x':n'} + \sum Y''(IA)^1_{x':\overline{n'}|} - \sum Y \ddot{a}_{x':\overline{n'}|}.$$

Nous avons déjà déterminé les âges moyens ξ' et η' se rapportant aux capitaux et aux primes annuelles pures. Aussi, avons-nous obtenu le développement lidstonien de l'assurance temporaire au décès $A^1_{x':\overline{n'}|}$. Désignons par ε' l'âge moyen relatif aux primes brutes tY'', que nous trouvons à l'aide de ce dernier développement. Il nous faut calculer maintenant encore un âge moyen relatif aux primes brutes Y''. Cet âge, que nous désignerons par θ', doit satisfaire à l'équation ci-après:

$$(IA)^1_{\theta':\overline{n'}|} \sum Y'' = \sum Y''(IA)^1_{x':\overline{n'}|}.$$

Pour le déterminer, nous allons d'abord calculer le développement lidstonien de l'assurance temporaire croissante au décès.

Ecrivons la prime unique $(IA)^1_{x':\overline{n'}|}$ sous une forme analytique:

$$(IA)^1_{x':\overline{n'}|} = \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} (1+\tau) v^\tau {}_{\tau-1}|q_{x'}, \qquad (102)$$

$$(IA)^1_{x':\overline{n'}|} = \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} \sum_{p=0}^{p=\infty} (1+\tau) v^\tau s^{\tau-1} \frac{c^{px'}(c^{\tau-1}-1)^p}{p!} \operatorname{Log}^p g$$

$$- \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} \sum_{p=0}^{p=\infty} (1+\tau) v^\tau s^\tau \frac{c^{px'}(c^\tau-1)^p}{p!} \operatorname{Log}^p g. \qquad (103)$$

En ne conservant que les deux premiers termes dans les développements des fonctions exponentielles:

$$(IA)^{1}_{x':\overline{n'}|} = \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} (1+\tau)\, v^{\tau} s^{\tau-1} \left[1 + c^{x'}(c^{\tau-1}-1)\operatorname{Log} g\right]$$

$$- \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} (1+\tau)\, v^{\tau} s^{\tau} \left[1 + c^{x'}(c^{\tau}-1)\operatorname{Log} g\right]. \qquad (104)$$

Posons:

$$\lambda_0(n') = \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} (1+\tau)\, v^{\tau}\, (s^{\tau-1} - s^{\tau})$$

$$\lambda_1(n') = \operatorname{Log} g \sum_{\tau=1}^{\tau=n'} (1+\tau)\, v^{\tau} \left[(c^{\tau-1}-1)\, s^{\tau-1} - (c^{\tau}-1)\, s^{\tau}\right].$$

Le développement lidstonien cherché s'écrit donc:

$$(IA)^{1}_{x':\overline{n'}|} = \lambda_0(n') + \lambda_1(n')\, c^{x'}. \qquad (105)$$

Puis, il est aisé de calculer l'âge moyen θ' au moyen de la relation:

$$\left[\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\, c^{\theta'}\right] \sum Y'' = \sum Y'' \left[\lambda_0(n') + \lambda_1(n')\, c^{x'}\right]$$

ou bien:

$$c^{\theta'} \sum Y'' = \sum Y'' c^{x'}.$$

Nous voyons que pour les capitaux différés avec contre-assurance, nous avons quatre âges moyens. En pratique, on peut prendre la moyenne de ces âges comme âge moyen unique et se contenter de l'approximation que cela fournit.

4° Assurances à terme fixe en cours

L'âge moyen à calculer est unique et concerne les primes annuelles. Son calcul s'effectue aisément comme dans les cas précédents. Il n'y a aucun nouveau problème qui se présente.

La formule par groupes des réserves mathématiques est simplement:

$$\sum C\, {}_tV^{(n)}_x = v^{n'} \sum C - \ddot{a}_{\overline{n'}:\overline{n'}|} \sum P. \qquad (106)$$

5° Assurances de rentes différées à primes annuelles

Nous allons chercher à obtenir le développement lidstonien pour la rente différée. La suite du travail se poursuit sans difficulté.

Dans la formule de la réserve mathématique totale d'un groupe de polices:

$$\sum {}_tV_x({}_n|\ddot{a}_x) = \sum r_{n'}|\ddot{a}_{x'} - \sum P\ddot{a}_{x':\overline{n'}|},$$

nous transformons d'abord la rente différée de n' années en une somme de capitaux différés:

$$ {}_{n-t}|\ddot{a}_{x+t} = {}_{n-t}E_{x+t} + {}_{n-t+1}E_{x+t} + {}_{n-t+2}E_{x+t} + \ldots, \tag{107}$$

$$ {}_{n-t}|\ddot{a}_{x+t} = \sum_{\tau=n-t}^{\tau=\omega-(x+t)} {}_{\tau}E_{x+t} = \sum_{\tau=n-t}^{\tau=\omega-(x+t)} v^{\tau}\,{}_{\tau}p_{x+t},$$

$$ {}_{n'}|\ddot{a}_{x'} = \sum_{\tau=n'}^{\tau=\omega-x'} \sum_{p=0}^{p=\infty} v^{\tau}s^{\tau}\frac{c^{\tau x'}(c^{\tau}-1)^{p}}{p!}\operatorname{Log}^{p} g, \tag{108}$$

formule d'où nous tirons le développement en série:

$$ {}_{n'}\ddot{a}_{x'} = \lambda_0(\omega - x') + \lambda_1(\omega - x')\,c^{x'} + \lambda_2(\omega - x')\,c^{2x'} + \ldots \tag{109}$$

et puis le développement lidstonien:

$$ {}_{n'}|\ddot{a}_{x'} = \lambda_0(m') + \lambda_1(m')\,c^{x'} \quad \text{avec} \quad m' = \omega - x' \tag{110}$$

où nous avons posé:

$$\lambda_0(m') = \sum_{\tau=n'}^{\tau=m'} v^{\tau}s^{\tau}$$

$$\lambda_1(m') = \sum_{\tau=n'}^{\tau=m'} v^{\tau}s^{\tau}(c^{\tau}-1)\operatorname{Log} g.$$

L'âge moyen ξ' à calculer sur les rentes doit satisfaire à la relation:

$$ {}_{n'}|\ddot{a}_{\xi'} \sum r = \sum r_{n'}|\ddot{a}_{x'}.$$

En introduisant le développement lidstonien des rentes, il vient:

$$[\lambda_0(m') + \lambda_1(m')\,c^{\xi'}] \sum r = \sum r\,[\lambda_0(m') + \lambda_1(m')\,c^{x'}]$$

et

$$c^{\xi'} \sum r = \sum r c^{x'},$$

relation qui permet de calculer aisément l'âge moyen ξ'.

Dès lors, nous pouvons écrire la formule de la réserve mathématique totale:

$$\sum {}_tV_x({}_n|\ddot{a}_x) = {}_{n'}|\ddot{a}_{\xi'} \sum r - \ddot{a}_{\eta':\overline{n'}|} \sum P, \tag{111}$$

où l'âge moyen η' sur les primes se calcule de la façon indiquée pour les cas précédents.

La méthode de Lidstone s'applique, comme on vient de le constater, à la plupart des combinaisons. On pourrait calculer les réserves de Lidstone sur primes d'inventaire. Cela ne change rien aux principes de la méthode; il suffit de remplacer les primes pures et les coefficients par leurs valeurs d'inventaire.

II. La méthode dérivée de la méthode de Lidstone

Nous avons vu que Lidstone fonda sa méthode sur la formule prospective des réserves mathématiques. Dans ce paragraphe, nous allons établir une méthode dérivée en nous basant sur la formule rétrospective. Notre travail se concentrera sur la recherche d'un âge moyen à l'inventaire pour les polices d'un groupe souscrites au même moment; ou, ce qui revient au même, nous chercherons à déterminer un âge d'entrée moyen. En effet, dans la méthode de Lidstone, on groupe les polices par années d'échéance; dans la nouvelle méthode on les groupera, en vertu de la correspondance «prospectif-rétrospectif», par années d'entrée ou, ce qui revient au même, en fonction de la durée écoulée t. A l'âge moyen à l'échéance de la méthode de Lidstone doit correspondre dans la nouvelle méthode un certain âge d'entrée moyen. La méthode dérivée de celle de Lidstone sera ainsi celle qu'on connaît déjà sous le nom de «méthode t»; mais nous la retrouverons ici vue sous un angle particulier.

Quand nous avons essayé de trouver une méthode dérivée de celle d'Altenburger, nous avons expliqué la correspondance entre les termes. Ici, il nous paraît superflu d'insister davantage sur ce point. Nous nous proposons de chercher, en premier lieu, un procédé correspondant au développement lidstonien. Dans la méthode de Lidstone, on cherche le développement en série de la prime unique et de la rente. Dans cette étude, nous nous préoccuperons de la recherche du développement en série de la valeur finale de la rente et de la valeur finale du risque. Après quoi, nous pourrons aborder le calcul de l'âge moyen à l'inventaire et enfin de l'âge d'entrée moyen.

Les calculs relatifs à la méthode de Lidstone se basent sur les propriétés de la loi de Makeham. Ici aussi, nous aurons recours à ces mêmes propriétés.

Parmi les assurances au décès, nous nous contenterons de l'étude de l'assurance mixte, vu que les formules rétrospectives des réserves sont semblables.

1° Assurances mixtes

On substitue, disions-nous de la méthode de Lidstone, aux différents âges atteints à l'inventaire par les assurés du groupe considéré un âge moyen unique, dans le but de remplacer les diverses rentes par une rente moyenne unique. Dans la nouvelle méthode à trouver, une certaine valeur déterminée doit correspondre à cette rente moyenne. Cette valeur est justement la valeur finale moyenne de la rente, qui doit se substituer aux différentes valeurs finales des rentes, après l'introduction d'un âge moyen unique correspondant à celui de Lidstone.

Cette remarque est valable aussi pour les engagements de l'assureur. Selon Lidstone, on remplace les valeurs actuelles des prestations par leur valeur actuelle moyenne. Dans la méthode dérivée, à cette valeur actuelle moyenne correspond la valeur moyenne finale du risque. Cela suppose également un âge moyen correspondant à celui de Lidstone.

Afin d'obtenir la méthode dérivée, il nous faudra calculer dans la formule rétrospective:

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = \sum P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|} - \sum C\,{}_{|t}S_x,$$

les âges moyens η' et ξ' selon les équations suivantes:

$$\ddot{s}_{\eta'-t:\overline{t}|}\sum P = \sum P\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|} \quad \text{et} \quad {}_{|t}S_{\xi'-t}\sum C = \sum C\,{}_{|t}S_x.$$

La solution du problème est liée à la possibilité d'exprimer les valeurs finales de la rente et du risque en développement lidstonien. Nous savons déjà que la valeur finale de la rente, $\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ est une somme de facteurs de capitalisation viagère ${}_{t-\tau}I_{x+\tau} = \dfrac{D_{x+\tau}}{D_{x+t}}$.
On a, en effet:

$$\ddot{s}_{x:\overline{t}|} = {}_tI_x + {}_{t-1}I_{x+1} + {}_{t-2}I_{x+2} + \cdots + {}_1I_{x+t-1}.$$

Nous pouvons écrire donc:

$$\ddot{s}_{\eta'-t:\overline{t}|} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} {}_{t-\tau}I_{\eta'-t+\tau} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \frac{1}{v^{(t-\tau)}\,{}_{t-\tau}p_{\eta'-t+\tau}}. \qquad (112)$$

Si la table de mortalité est ajustée d'après la loi de Makeham, notre dernière formule peut être mise sous la forme:

$$\ddot{s}_{\eta'-t:\overline{t}|} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}\, e^{\operatorname{Log} g\, c^{\eta'-t}(c^\tau - c^t)} \qquad (113)$$

ou, en ne conservant que les deux premiers termes du développement:

$$\ddot{s}_{\eta'-t:\overline{t}|} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}\left[1 + c^{\eta'-t}(c^\tau - c^t)\operatorname{Log} g\right]. \qquad (114)$$

En posant: $$\alpha_0(t) = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}$$

$$\alpha_1(t) = \operatorname{Log} g \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}(c^\tau - c^t),$$

nous aurons le développement lidstonien suivant:

$$\ddot{s}_{\eta'-t:\overline{t}|} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\, c^{\eta'-t} \tag{115}$$

et $$\ddot{s}_{x:\overline{t}|} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\, c^x.$$

Dès lors, l'équation du début concernant les primes annuelles prend la forme ci-après:

$$[\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\, c^{\eta'-t}] \sum P = \sum P\,[\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\, c^x],$$

et puis, $$c^{\eta'-t} \sum P = \sum P c^x.$$

Pour la commodité des calculs, nous écrivons:

$$c^{\eta'-t-30} \sum P = \sum P c^{x-30}.$$

Pour chaque police du groupe, nous introduisons le coefficient $\bar{Z}'' = P c^{x-30}$, qui reste fixe durant l'assurance, indépendant de t. On l'inscrit sur chaque carte technique comme autrefois le coefficient de Lidstone. Au moyen des logarithmes ou d'une table des puissances de c, on peut alors calculer l'âge moyen du groupe à l'inventaire.

Il nous reste encore à calculer le deuxième âge moyen, relatif aux capitaux. Pour y parvenir, nous devons trouver d'abord le développement lidstonien de la valeur finale du risque. Exprimons cette dernière sous une forme analytique:

$${}_{|t}S_x = \frac{1}{v^t\, {}_tp_x} \sum_{\tau=1}^{\tau=t} v^\tau\, {}_{\tau-1|}q_x. \tag{116}$$

Dans cette formule, nous pouvons remplacer la probabilité différée de décès par des probabilités de vie:

$${}_{|t}S_x = \frac{1}{v^t\, {}_tp_x} \sum_{\tau=1}^{\tau=t} v^\tau ({}_{\tau-1}p_x - {}_\tau p_x), \tag{117}$$

ou encore:

$${}_{|t}S_x = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \frac{v^\tau l_x}{v^t l_{x+t}} \left(\frac{l_{x+\tau-1}}{l_x} - \frac{l_{x+\tau}}{l_x} \right),$$

$${}_{|t}S_x = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \frac{1}{v^{t-\tau}} \left(\frac{1}{{}_{-\tau+1}p_{x+\tau-1}} - \frac{1}{{}_{t-\tau}p_{x+\tau}} \right),$$

$${}_{|t}S_x = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \frac{1}{v^{t-\tau}\, {}_{t-\tau+1}p_{x+\tau-1}} - \sum_{\tau=1}^{\tau=t} \frac{1}{v^{t-\tau}\, {}_{t-\tau}p_{x+\tau}}, \tag{118}$$

ou bien, si la table de mortalité est ajustée d'après la loi de Makeham:

$$|_tS_x = \frac{1}{s}\sum_{\tau=1}^{\tau=t}(vs)^{-(t-\tau)}\, e^{-\mathrm{Log}\, g\, c^x(c^t-c^{\tau-1})} - \sum_{\tau=1}^{\tau=t}(vs)^{-(t-\tau)}\, e^{-\mathrm{Log}\, g\, c^x(c^t-c^{\tau})}. \quad (119)$$

Nous connaissons le développement en série de l'exponentielle:

$$e^{\mathrm{Log}\, g\, c^x(c^t-c^{\tau-1})} = \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{c^{px}(c^t-c^{\tau-1})}{p!}\mathrm{Log}^p g.$$

Ne conservant que les deux premiers termes de la série, nous pourrons écrire la formule de la valeur finale du risque comme suit:

$$|_tS_x = \frac{1}{s}\sum_{\tau=1}^{\tau=t}(vs)^{-(t-\tau)}[1-c^x(c^t-c^{\tau-1})\,\mathrm{Log}\, g] - \sum_{\tau=1}^{\tau=t}(vs)^{-(t-\tau)}[1-c^x(c^t-c^{\tau})\,\mathrm{Log}\, g]. \quad (120)$$

Nous tirons de cette formule le développement limité que voici:

$$|_tS_x = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^x, \quad (121)$$

où nous avons convenu de poser:

$$\lambda_0(t) = \left(\frac{1}{s}-1\right)\sum_{\tau=1}^{\tau=t}(vs)^{-(t-\tau)}$$

$$\lambda_1(t) = \mathrm{Log}\, g\left[\sum_{\tau=1}^{\tau=t}(vs)^{-(t-\tau)}(c^t-c^{\tau}) - \frac{1}{s}\sum_{\tau=1}^{\tau=t}(vs)^{-(t-\tau)}(c^t-c^{\tau-1})\right].$$

Ces coefficients sont indépendants de l'âge x; ils sont fonctions de la durée écoulée t. Nous aurons de même:

$$|_tS_{\xi'-t} = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^{\xi'-t}. \quad (122)$$

Moyennant ces développements limités que nous introduisons dans l'équation:

$$|_tS_{\xi'-t}\sum C = \sum C\,|_tS_x,$$

nous pouvons obtenir l'âge moyen cherché, comme dans le cas précédent:

$$c^{\eta'-t-30}\sum C = \sum C\, c^{x-30}.$$

Maintenant, nous introduisons pour chaque police le coefficient de la méthode dérivée de celle de Lidstone, relatif aux capitaux $\overline{Z}' = C\, c^{x-30}$.

Après avoir calculé ainsi les âges moyens, la formule de la méthode dérivée de Lidstone s'écrit:

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = \ddot{s}_{\eta'-t:\overline{t}|}\sum P - |_tS_{\xi'-t}\sum C. \quad (123)$$

Pour cette méthode aussi, on peut se contenter de l'emploi d'un seul âge moyen et de l'approximation qui en résulte. Nous allons appliquer cette dernière formule à un exemple numérique.

Exemple numérique 6: On a un groupe de 10 polices d'assurances mixtes souscrites en 1945. Il s'agit de calculer la réserve mathématique totale du groupe par la méthode dérivée de celle de Lidstone, d'après la table SM 1948/53 à $2\frac{1}{2}\%$. Bien qu'ajustée par la méthode de King, cette table est très voisine de celle qui résulterait d'un ajustement par la loi de Makeham en choisissant la constante c égale à 1,102573.

Pol. N°	Naissance	Souscription	Echéance	x	C	P	$\bar{Z}''$	$\frac{\bar{Z}'}{100}$
1	1900	1945	1970	45	15 000	528,45	2 286,20	642
2	1900	1945	1965	45	10 000	434,90	1 881,48	433
3	1905	1945	1965	40	10 000	414,90	1 101,58	266
4	1910	1945	1970	35	12 000	375,00	611,04	196
5	1915	1945	1965	30	8 000	317,44	317,44	80
6	1905	1945	1970	40	5 000	163,75	434,76	133
7	1900	1945	1970	45	5 000	176,15	762,07	216
8	1915	1945	1975	30	15 000	367,20	367,20	150
9	1910	1945	1965	35	10 000	403,10	656,82	163
10	1910	1945	1970	35	8 000	250,00	407,36	130
					98 000	3 430,89	8 825,95	2 416

Nous avons calculé les âges moyens suivants:

Ages moyens sur les primes annuelles $\eta' = 55$ et $\eta = 40$ ans.

Ages moyens sur les capitaux $\xi' = 54$ et $\xi = 39$ ans.

Nous pouvons comparer dans le tableau ci-dessous les réserves mathématiques obtenues par l'application des âges moyens différents.

Méthodes	Réserves mathématiques	Ecart	Erreur relative
Méthode individuelle	56 078	—	—
Méthode dérivée:			
sur un âge moyen unique η . .	55 603	— 475	$-\frac{847}{10^5}$
sur un âge moyen unique ξ . .	56 305	+ 227	$+\frac{405}{10^5}$
sur deux âges moyens η et ξ . .	56 740	+ 662	$+\frac{1180}{10^5}$
sur la moyenne de η et de ξ . .	55 954	— 124	$-\frac{221}{10^5}$

Comme il ressort des calculs que nous venons d'effectuer, les écarts sont, pour cet exemple, assez accentués. La meilleure approximation est fournie par l'emploi de la moyenne arithmétique des deux âges moyens.

La méthode dérivée, dans le cas des assurances vie-entière et temporaire au décès, est tout à fait semblable à celle de l'assurance mixte. Il en est de même de la correspondance «prospectif-rétrospectif» entre les termes des réserves mathématiques.

En effet, dans le cas de l'assurance mixte: d'une part, le terme rétrospectif $P\breve{s}_{\eta'-t:\overline{t}|}$ de la méthode dérivée correspond au terme prospectif $P\ddot{a}_{\eta':\overline{n}|}$ de la méthode de Lidstone et, d'autre part, le terme rétrospectif $C_{|t}S_{\xi'-t}$ correspond au terme prospectif $CA_{\xi':\overline{n}|}$.

2° Assurances de capitaux différés

a) sans contre-assurance:

La formule rétrospective des réserves mathématiques d'un groupe d'assurés, entrés la même année, s'écrit:

$$\sum C\,{}_tV_x({}_nE_x) = \sum P\,\breve{s}_{x:\overline{t}|}.$$

Si les valeurs finales des rentes peuvent être remplacées par une valeur finale moyenne des rentes, nous obtiendrons la nouvelle méthode dérivée de celle de Lidstone pour ces assurances. Or, comme nous venons de le voir à propos de l'assurance mixte, cela est possible. Ici, l'introduction d'un seul âge moyen d'entrée η suffit. La méthode dérivée conduit simplement à la formule suivante:

$$\sum C\,{}_tV_x({}_nE_x) = \breve{s}_{\eta'-t:\overline{t}|}\sum P. \qquad (124)$$

Le terme rétrospectif $P\breve{s}_{\eta'-t:\overline{t}|}$ correspond au terme prospectif $P\ddot{a}_{\eta':\overline{n}|}$ de la méthode de Lidstone. Par contre, à la valeur actuelle des prestations de l'assureur $C\,{}_tE_{\xi'}$ dans la méthode de Lidstone correspond $C0$ dans la méthode dérivée; car durant le différé, l'assureur n'a rien à payer en cas de décès de l'assuré.

Dans cette méthode dérivée, l'âge moyen est unique, ce qui offre un avantage certain.

Les constatations ci-dessus sont vraies aussi pour les assurances de rentes différées.

b) avec contre-assurance:

Alors que la méthode de Lidstone pour cette combinaison recourt à quatre âges moyens, la nouvelle méthode issue de la formule rétrospective offre l'avantage de ne faire intervenir que deux âges moyens seulement. Si nous parvenons à trouver le développement lidstonien de la valeur finale du risque croissant, le problème sera résolu.

La valeur finale du risque croissant peut s'exprimer sous la forme analytique suivante:

$$|_t(IS)_x = \frac{1}{v^t\ {}_tp_x} \sum_{\tau=1}^{\tau=t} (1+\tau)\, v^\tau\ {}_{\tau-1}|q_x, \tag{125}$$

ou bien, en exprimant l'expression sous la sommation en fonction des probabilités de vie:

$$|_t(IS)_x = \frac{1}{v^t\ {}_tp_x} \sum_{\tau=1}^{\tau=t} (1+\tau)\, v^\tau({}_{\tau-1}p_x - {}_\tau p_x), \tag{126}$$

ou encore:

$$|_t(IS)_x = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} (1+\tau)\, \frac{1}{v^{t-\tau}} \left(\frac{1}{{}_{t-\tau+1}p_{x+\tau-1}} - \frac{1}{{}_{t-\tau}p_{x+\tau}} \right),$$

$$|_t(IS)_x = \sum_{\tau=1}^{\tau=t} (1+\tau)\, \frac{1}{v^{t-\tau}\ {}_{t-\tau+1}p_{x+\tau-1}} - \sum_{\tau=1}^{\tau=t} (1+\tau)\, \frac{1}{v^{t-\tau}\ {}_{t-\tau}p_{x+\tau}}. \tag{127}$$

Nous arrivons à une formule analogue à la relation (119):

$$|_t(IS)_x = \frac{1}{s} \sum_{\tau=1}^{\tau=t} (1+\tau)\, (vs)^{-(t-\tau)}\, e^{-\mathrm{Log}\, g\, c^x (c^t - c^{\tau-1})} - \sum_{\tau=1}^{\tau=t} (1+\tau)\, (vs)^{-(t-\tau)}\, e^{-\mathrm{Log}\, g\, c^x (c^t - c^\tau)}. \tag{128}$$

Après le développement en série des fonctions exponentielles comme dans la formule (120), nous pouvons écrire le développement limité de la valeur finale du risque croissant:

$$|_t(IS)_x = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^x, \tag{129}$$

où:

$$\lambda_0(t) = \left(\frac{1}{s} - 1\right) \sum_{\tau=1}^{\tau=t} (1+\tau)\, (vs)^{-(t-\tau)}$$

$$\lambda_1(t) = \mathrm{Log}\, g \sum_{\tau=1}^{\tau=t} (1+\tau)\, (vs)^{-(t-\tau)} \left[(c^t - c^\tau) - \frac{1}{s} (c^t - c^{\tau-1}) \right].$$

Ensuite, nous tirons aisément l'âge moyen ξ de l'équation suivante:

$$|_t(IS)_{\xi'-t} \sum Y'' = \sum Y''\, |_t(IS)_x.$$

Nous aurons finalement, pour la méthode dérivée, la formule définitive:

$$\sum C\ {}_tV_x({}_nE_x^{(c)}) = \ddot{s}_{\eta'-t:\overline{t}|} \sum Y - |_t(IS)_{\xi'-t} \sum Y''. \tag{130}$$

3° Assurances à terme fixe en cours

Pour un groupe d'assurés, entrés la même année, on a:

$$\sum C_t V_x^{(n)} = \sum P \ddot{s}_{x:\overline{t}|} - \sum C k_{x:\overline{t}|}$$

où

$$k_{x:\overline{t}|} = v^{n-t} \frac{l_x - l_{x'}}{l_{x'}} = v^n k^*_{x:\overline{t}|}.$$

Si la quantité caractéristique de la formule rétrospective, $k^*_{x:\overline{t}|}$, peut être exprimée en développement lidstonien, nous pourrons calculer l'âge moyen d'entrée et, par suite, la valeur moyenne de $k^*_{x:\overline{t}|}$. Autrement dit, l'âge moyen ξ' à déterminer doit être tel qu'il satisfasse à l'équation:

$$k^*_{\xi'-t:\overline{t}|} \sum C v^n = \sum C v^n k^*_{x:\overline{t}|}.$$

Examinons maintenant la nature de la valeur $k^*_{x:\overline{t}|}$:

$$k^*_{x:\overline{t}|} = v^{-t} \frac{l_x - l_{x'}}{l_{x'}},$$

ou bien, si la table de mortalité est ajustée d'après la loi de Makeham:

$$k^*_{x:\overline{t}|} = (vs)^{-t} e^{-\operatorname{Log} g\, c^x (c^t - 1)} - v^{-t}. \tag{131}$$

En ne conservant que les deux premiers termes du développement en série de la fonction exponentielle, nous pourrons écrire:

$$k^*_{x:\overline{t}|} = (vs)^{-t} [1 - c^x (c^t - 1) \operatorname{Log} g] - v^{-t}. \tag{132}$$

Nous tirons de cette formule le développement lidstonien suivant:

$$k^*_{x:\overline{t}|} = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^x, \tag{133}$$

avec:

$$\lambda_0(t) = v^{-t}(s^{-t} - 1)$$
$$\lambda_1(t) = -(vs)^{-t} \operatorname{Log} g\, (c^t - 1).$$

Au moyen de ce dernier développement lidstonien, nous pouvons calculer dans l'équation de départ l'âge moyen ξ, et établir ensuite la formule de la méthode dérivée de celle de Lidstone:

$$\sum C_t V_x^{(n)} = \ddot{s}_{\eta'-t:\overline{t}|} \sum P - k^*_{\xi'-t:\overline{t}|} \sum C v^n. \tag{134}$$

Outre la correspondance entre les termes $P \ddot{s}_{\eta'-t:\overline{t}|}$ et $P \ddot{a}_{\eta'-t:\overline{t}|}$ dans les deux méthodes, on remarque une nouvelle correspondance: le terme $C v^n k^*_{\xi'-t:\overline{t}|}$ de la méthode dérivée correspond au terme $C v^{n'}$ de la méthode de Lidstone.

Nous allons voir l'application pratique de cette méthode dérivée à un petit groupe de polices terme fixe.

Exemple numérique 7: Nous nous proposons de calculer la réserve mathématique totale d'un groupe de 8 polices terme fixe à la date du 1er juillet 1960 d'après la table SM 1948/53 à 2½%.

La constante de Makeham $c = 1{,}102\,573$.

Pol. N°	Naissance	Souscription	Echéance	x	C	P	$\bar{Z}''$	Cv^n
1	1900	1945	1965	45	10 000	414,25	1 792,14	6 102,71
2	1905	1945	1965	40	12 000	482,49	1 281,04	7 323,25
3	1910	1945	1970	35	5 000	150,05	244,50	2 696,96
4	1910	1945	1965	35	5 000	197,43	321,70	3 051,36
5	1915	1945	1975	30	15 000	349,50	349,50	7 151,15
6	1915	1945	1965	30	8 000	312,82	312,82	4 882,17
7	1910	1945	1970	35	6 000	180,06	293,40	3 236,35
8	1905	1945	1970	40	10 000	308,22	818,34	5 393,91
					71 000	2 394,82	5 413,44	39 837,86

La réserve mathématique individuelle totale: 41 564.

Nous avons calculé les âges moyens relatifs aux primes et aux capitaux et nous avons obtenu $\eta = \xi = 38$ ans et $\eta' = \xi' = 53$. L'âge moyen calculé est, dans ce cas, unique et le calcul de la réserve se base sur celui-ci.

$$\sum {}_tV_x^{(n)} = \ddot{s}_{38:\overline{15}|} \sum P - k^*_{38:\overline{15}|} \sum Cv^n \qquad \text{avec} \qquad \ddot{s}_{38:\overline{15}|} = 19{,}448$$

$$\sum {}_tV_x^{(n)} = 19{,}448 \cdot 2\,394{,}82 - 0{,}12\,605 \cdot 39\,837{,}86 \quad k^*_{38:\overline{15}|} = \quad 0{,}12\,605$$

$$\sum {}_tV_x^{(n)} = \underline{41\,553}.$$

L'écart entre les réserves individuelles et les réserves calculées d'après la méthode dérivée de celle de Lidstone n'est que de 11. L'erreur relative ainsi commise, $\frac{2^5}{10^5}$, est très faible. Nous pouvons admettre que l'approximation est tout à fait satisfaisante.

Au terme de cette étude, nous voulons mettre l'accent sur une correspondance capitale entre les deux méthodes: La méthode de Lidstone groupe les polices ayant le même nombre n' d'années restant à courir. La méthode dérivée, soit la méthode «t», elle, groupe les polices ayant le même nombre t d'années écoulées. Nous plaçant au moment de l'inventaire, dans les deux méthodes, nous savons que, pour chaque police, l'âge moyen à l'échéance dans la méthode de Lidstone correspond à l'âge d'entrée moyen dans la méthode dérivée. De même, pour chaque police, la durée prospective n' correspond à la durée rétrospective t. Ces remarques nous ont amené tout naturellement à grouper dans la méthode dérivée les polices de même durée écoulée t, comme on groupe les polices de même durée n' dans la méthode de Lidstone; c'est la méthode «t».

III. Critique de la méthode de Lidstone et de sa méthode dérivée

Pour juger de la précision des résultats obtenus par la méthode de Lidstone et sa méthode dérivée, il nous faut examiner deux causes d'erreurs. La première réside dans la suppression des termes dès et y compris le 3e dans le développement lidstonien. L'erreur ainsi commise est faible. Les exemples numériques effectués dans l'exposé des deux méthodes nous en fournissent une preuve. La deuxième cause est relative au choix d'un seul des âges moyens calculés soit sur les capitaux, soit sur les primes annuelles. Comme nous l'avons déjà signalé, l'erreur commise par ce choix est faible. A noter que ces deux causes d'erreurs peuvent agir en sens contraire, auquel cas la précision offerte par les deux méthodes n'en est que plus grande; mais, elles peuvent aussi s'ajouter.

Après avoir établi le barème approprié, on calcule aisément les coefficients de Lidstone ou ceux de la méthode dérivée, qu'on inscrit sur les cartes techniques. Au moyen de tableaux préparés, on obtient rapidement les âges moyens à l'inventaire, et à la souscription.

S'il s'agit d'assurances sur deux têtes, la méthode de Lidstone et sa méthode dérivée peuvent être appliquées directement. Pour les autres méthodes, ce n'est pas le cas. L'établissement préalable de tables de commutation sur deux têtes s'impose.

Lorsqu'on inscrit les contrats une fois pour toutes dans le livre d'inventaire, les erreurs éventuelles d'addition et d'inscription du groupe se répètent chaque année d'inventaire, jusqu'à l'échéance. Comme, dans la méthode de Lidstone, un groupe disparaît entièrement à l'échéance commune, ces erreurs se trouvent du même coup éliminées; ce qui n'est pas le cas dans la méthode d'Altenburger, ni dans la méthode dérivée de celle de Lidstone.

La méthode de Lidstone et sa méthode dérivée ne peuvent être utilisées par une compagnie d'assurances qui n'a qu'un petit nombre d'assurés, notamment au début de son activité. Elles conviennent aux compagnies qui possèdent un portefeuille assez important.

L'emploi généralisé de la méthode de Lidstone par les compagnies d'assurances anglaises témoigne de son importance et de ses avantages. Dès le début du 20e siècle, toutes les compagnies d'Angleterre ont abandonné les autres méthodes pour adopter celle de Lidstone. Et puis, certains pays du continent ont commencé à l'appliquer. En Suisse, elle est peu utilisée.

La méthode dérivée peut être aussi avantageusement utilisée. Dans les deux méthodes, la prudence s'impose, lorsqu'on détermine les âges moyens, cela en vue d'obtenir une approximation satisfaisante.

Au sujet de l'approximation de la méthode de Lidstone, la remarque de M. Podtiaguine de Prague mérite d'être relevée ici. Cet actuaire s'est attaché à démontrer que la méthode de Lidstone peut conduire, dans certains cas, à des réserves mathématiques différant sensiblement des réserves exactes.

M. Podtiaguine essaie d'abord d'estimer le degré d'approximation du développement lidstonien et établit un nouveau procédé pour le calcul de l'âge moyen à l'inventaire d'un groupe de polices.

Il donne, en premier lieu, les différentes expressions analytiques de la rente temporaire et montre que, pour les âges-termes supérieurs à 70 ans, la série converge très lentement et qu'au delà de cet âge, l'erreur devient importante; d'où il conclut à l'insuffisance de la précision donnée par le développement lidstonien, lorsque les âges à l'échéance sont supérieurs à 70 ans. Dès lors, il propose un autre développement en série de la rente temporaire, à convergence plus rapide. Dans ce but, il fait subir à la formule de la rente temporaire la transformation de Lindelöf de telle manière que le troisième terme

de la série soit nul. D'après les résultats qu'il a obtenus par l'application de la nouvelle série, il a prouvé que sa méthode conduit à des résultats bien meilleurs que ceux obtenus avec la méthode de Lidstone. Même pour les âges inférieurs à 70 ans, il pense qu'elle lui est préférable.

Cependant, pour le calcul des âges moyens, les deux méthodes se valent.

Nous ne pouvons que nous rallier au point de vue de M. Podtiaguine et constater avec lui que les résultats obtenus avec sa méthode sont plus précis que ceux fournis par la méthode de Lidstone.

Toutefois, comme la plupart des polices conclues ont, dans la pratique, des âges-termes inférieurs ou égaux à 70 ans, on peut tout de même appliquer la méthode de Lidstone sans risquer de commettre d'erreurs importantes.

Chapitre IV

Recherche de la méthode dérivée de la méthode «*t*»

I. La méthode «t»

Nous venons de voir que la méthode «*t*» est la méthode dérivée de celle de Lidstone. Néanmoins, nous allons en exposer les caractères généraux.

La méthode «*t*» se base sur la formule rétrospective des réserves mathématiques et cherche à obtenir les âges moyens pour les valeurs finales de la rente et du risque, d'un groupe de polices ayant la même année d'entrée. C'est exactement ce problème qui nous a préoccupé dans le dernier paragraphe et nous avons essayé de trouver un âge moyen à la souscription correspondant à l'âge moyen à l'échéance de la méthode de Lidstone. En cherchant la méthode dérivée, nous sommes arrivé à la méthode «*t*». Donc, la méthode «*t*» n'est pas autre que la méthode dérivée de celle de Lidstone. Dans la méthode «*t*», on groupe les polices qui ont le même nombre t d'années courues, alors que, dans la méthode de Lidstone, les polices d'un groupe ont le même nombre n' d'années à courir. Ces deux éléments rétrospectif-prospectif t et n' sont correspondants et donnent à chacune des deux méthodes sa particularité essentielle.

La méthode «*t*» a été étudiée par divers auteurs de la Suisse alémanique. Tous ont cherché à en montrer les avantages et les inconvénients. Le lecteur peut prendre connaissance de ces études dans les *Bulletins annuels de l'Association des Actuaires suisses* (voir la bibliographie à la fin). Toutefois, nous allons brièvement indiquer quelques procédés de calcul de l'âge moyen avant de mettre un terme à l'étude de cette méthode dérivée.

Il est possible, si la table de mortalité adoptée est ajustée par la loi de Makeham, de calculer l'âge moyen ξ sur les capitaux ou η sur les primes annuelles par l'introduction du taux instantané de mortalité:

$$\mu_\xi = \frac{\sum C\mu_x}{\sum C} \quad \text{ou} \quad \mu_\eta = \frac{\sum P\mu_x}{\sum P}. \tag{135}$$

Si la table de mortalité n'est pas ajustée d'après Makeham, M. Jecklin, professeur à l'Université de Zurich, a démontré que l'âge

moyen d'entrée peut être déterminé en faisant intervenir la probabilité de décès:

$$q_\xi = \frac{\sum C q_x}{\sum C} \quad \text{ou} \quad q_\eta = \frac{\sum P q_x}{\sum P}. \tag{136}$$

Mais pour cette application, les probabilités de décès doivent être une fonction monotone dans l'intervalle considéré. Les probabilités $q_{\xi'}$ et $q_{\xi+t}$ diffèrent l'une de l'autre. C'est un calcul approximatif de l'âge moyen. Il constitue donc une source d'erreurs. Pour cette raison, la forme d'ajustement est importante. Dans les tables ajustées par des méthodes mécaniques, l'allure réelle de la courbe de mortalité est conservée; on doit les employer avec prudence pour calculer les âges moyens. Pour éviter ces inconvénients, M. Ruch de Berne a remarqué que d'autres fonctions de x et de t fournissent peut-être une meilleure base pour les calculs que q_x, en particulier lorsque la table de mortalité n'est pas ajustée d'après la loi de Makeham; il a substitué à q_x une fonction $f(x+\tau,\tau)$:

$$f(x+\tau,\tau) = A_\tau + B_\tau q_{x+\tau}, \tag{137}$$

où A_τ et B_τ sont des constantes positives ou négatives pour une valeur déterminée de $\tau = t$. Puis, il a considéré encore une autre fonction:

$$g(x,\tau) = a_\tau f(x+\tau,\tau) + b_\tau, \tag{138}$$

où a_τ et b_τ sont aussi des constantes.

Si l'on demande que, pour $x+\tau = x_1$ et pour $x+\tau = x_2$, on ait $g(x_1,\tau) = q_{x_1}$ et $g(x_2,\tau) = q_{x_2}$, on obtient les deux équations:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1+\tau,\tau) &= A_\tau + B_\tau q_{x_1} \\ f(x_2+\tau,\tau) &= A_\tau + B_\tau q_{x_2} \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Puis, on calcule les constantes:

$$A_\tau = \frac{f(x_2+\tau,\tau)\, q_{x_1} - f(x_1+\tau,\tau)\, q_{x_2}}{q_{x_1} - q_{x_2}},$$

$$B_\tau = \frac{f(x_1+\tau,\tau) - f(x_2+\tau,\tau)}{q_{x_1} - q_{x_2}}.$$

On aura ainsi la relation:

$$g(x,\tau) = \frac{f(x+\tau,\tau) - A_\tau}{B_\tau}. \tag{140}$$

Avec les tableaux établis pour les fonctions $f(x+\tau,\tau)$ et $g(x,\tau)$, on calcule l'âge moyen. Pour cela, dans la formule de la réserve mathématique sur un âge moyen unique η, soit:

$$\sum C\,{}_tV_x = \frac{N_\eta - N_{\eta+t}}{D_{\eta+t}} \sum P - \frac{M_\eta - M_{\eta+t}}{D_{\eta+t}} \sum C,$$

on calcule l'âge η d'après la relation suivante:

$$g(\eta) \sum C = \sum g(x)\, C, \qquad (141)$$

$$g(\eta) = \frac{\sum g(x)\, C}{\sum C}.$$

M. Ruch, qui a fait des calculs d'après ce système, a remarqué que les différences constatées entre la méthode «*t*» modifiée suivant sa proposition et la méthode exacte ne sont pas fortes et que les résultats peuvent être considérés comme bons. Pour améliorer l'approximation, il propose d'utiliser deux âges moyens, l'un calculé sur les capitaux, l'autre sur les primes annuelles.

II. La méthode dérivée de la méthode «t»

La méthode dérivée de la méthode «*t*» doit se baser sur la formule prospective des réserves mathématiques en vertu de la correspondance «rétrospectif-prospectif». Nous avons déjà vu cette méthode dans l'étude de celle de Lidstone. La nouvelle méthode que nous désirons établir, est précisément la méthode de Lidstone. Le problème ayant été résolu en détail, nous n'avons rien à y ajouter. Pour le calcul des âges moyens, l'introduction des fonctions proposées par M. Ruch peut être avantageuse dans la méthode de Lidstone, au cas où la table de mortalité s'éloigne sensiblement de la loi de Makeham.

III. Critique de la méthode «t»

La méthode «*t*» est une méthode d'approximation. Judicieusement appliquée, elle fournit des résultats satisfaisants.

Du point de vue de l'organisation, cette méthode offre quelques avantages appréciables. Le groupement d'après le nombre d'années

écoulées permet un registre régulier et clair. Il fournit peu de groupes, mais chacun est étendu. L'inscription sur chaque carte technique du coefficient $\overline{Z}' = C\mu_x$ ou $\overline{Z}' = Cq_x$ est facile à effectuer.

Lorsqu'il s'agit d'un portefeuille assez important dont les sommes assurées ne sont pas très élevées, l'application de la méthode «*t*» donne satisfaction. Elle est utilisée, par exemple, pour le calcul de réserves mathématiques d'assurances populaires.

Toutefois, en cas de changement des bases techniques, la méthode de Lidstone, basée sur la formule prospective, a des avantages.

La méthode «*t*» rend encore de bons services dans les calculs de la répartition des bénéfices aux assurés.

Chapitre V

Recherche de la méthode dérivée de la méthode de Fouret

I. La méthode de Fouret

Appelée aussi «méthode de récurrence», la méthode de Fouret consiste à calculer chaque année les réserves mathématiques en partant de celles de l'année précédente. Elle suppose connues les réserves mathématiques d'un groupe de contrats de même âge $x'-1$ lors du précédent inventaire et cherche à obtenir leurs réserves mathématiques lors du nouvel inventaire, à l'âge x'.

Fouret forme des groupes en réunissant les contrats qui reposent sur des têtes de même âge, sans se préoccuper de leur durée. Il choisit le 1er janvier d'une année comme date de naissance de tous les assurés nés dans les six mois qui précèdent ou qui suivent cette date. De même, il considère toute assurance comme prenant cours à la date du 1er janvier. Ainsi, il calcule les primes annuelles et les réserves mathématiques sur la base des âges ronds.

Nous allons exposer sommairement cette méthode pour les assurances mixtes et l'étendrons à toutes les assurances au décès. Ensuite, nous l'appliquerons aux assurances de capitaux différés et à la terme fixe.

1° Assurances mixtes

La méthode de Fouret est fondée sur la formule bien connue de récurrence des réserves mathématiques:

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}+P)\,(1+i) = d_{x+t-1}+l_{x+t}\,{}_tV_{x:\overline{n}|}, \qquad (142)$$

formule dans laquelle on suppose que les capitaux assurés sont payables à la fin de l'année de décès. On en tire la réserve à la fin de la t^e année en fonction de la réserve à la fin de la $(t-1)^e$ année:

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{p_{x+t-1}}\left[({}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}+P)\,(1+i)-q_{x+t-1}\right]. \qquad (143)$$

Pour un groupe de contrats ayant le même âge x' à l'inventaire, on aura:

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{p_{x'-1}}\left[\left(\sum C\,{}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}+\sum P\right)(1+i)-q_{x'-1}\sum C\right]. \qquad (144)$$

La formule (143) est applicable aux assurances qui sont encore en cours à la fin de la t^e année. Les assurances qui sont sorties du portefeuille durant l'exercice pour une cause quelconque, sorties normales ou anormales, doivent être retirées du groupe. Il faut retrancher leurs réserves mathématiques à l'âge $x'-1$ de celles du groupe, de même que leurs primes pour l'année $x'-1 \to x'$ et les capitaux sortis. Les réserves mathématiques des assurances, entrées au cours de l'année, sont calculées séparément.

2° Assurances de capitaux différés

a) sans contre-assurance:

En passant de la $(t-1)^e$ à la t^e année, la réserve mathématique d'une assurance augmente: d'une part, de la prime annuelle et des intérêts; l'assureur n'a en effet pas de paiement à effectuer; d'autre part, elle s'accroît encore de la part libérée par les décès. La formule de récurrence de la réserve mathématique est alors:

$$l_{x+t-1}\left[{}_{t-1}V_x({}_nE_x)+P\right](1+i) = l_{x+t}\,{}_tV_x({}_nE_x). \qquad (145)$$

Pour un groupe de polices de même âge x' à l'inventaire, nous aurons:

$$\sum C\,{}_tV_x({}_nE_x) = \frac{1}{p_{x'-1}}\left[\sum C\,{}_{t-1}V_x({}_nE_x)+\sum P\right](1+i). \qquad (146)$$

C'est une formule susceptible d'application facile.

b) avec contre-assurance:

Le risque de remboursement des primes annuelles payées jusqu'à la t^e année existe dans cette combinaison. En utilisant les mêmes notations que précédemment, nous pouvons écrire la formule de récurrence:

$$l_{x+t-1}\left[{}_{t-1}V_x({}_nE_x^{(c)})+Y\right](1+i) = d_{x+t-1}\,tY''+l_{x+t}\,{}_tV_x({}_nE_x^{(c)}). \qquad (147)$$

Pour un groupe de polices de même âge x' à l'inventaire, il vient:

$$\sum C\,{}_tV_x({}_nE_x^{(c)}) = \frac{1}{p_{x'-1}}\left[\left(\sum C\,{}_{t-1}V_x({}_nE_x^{(c)})+\sum Y\right)(1+i)-q_{x'-1}\sum tY''\right], \qquad (148)$$

où t varie d'une police à l'autre du groupe, ce qui ne complique du reste guère le calcul des primes brutes restituées.

3° Assurances à terme fixe en cours

La formule de Fouret est, pour cette assurance:

$$\sum C_t V_x^{(n)} = \frac{1}{p_{x'-1}} \left[\sum \left(C_{t-1} V_x^{(n)} + P \right) (1+i) - q_{x'-1} \sum C v^{n'} \right]. \quad (149)$$

L'application de cette formule ne présente aucune difficulté.

Au terme de ce bref examen, nous pouvons conclure que la méthode de Fouret s'applique à toutes les combinaisons et qu'elle est une méthode exacte et rapide.

Si l'on veut calculer les réserves mathématiques sur primes d'inventaire, les principes appliqués aux réserves pures restent encore valables.

Dans la pratique, on emploie volontiers la méthode de Fouret en vue de vérifier les réserves calculées par d'autres méthodes; mais, on peut aussi l'appliquer pour son propre compte.

II. La méthode dérivée de la méthode de Fouret

La méthode de Fouret permet de déterminer les réserves mathématiques d'un groupe de polices à l'âge x' en fonction des réserves mathématiques de ce même groupe à l'âge $x'-1$. C'est une méthode rétrospective. La méthode dérivée que nous essayerons de trouver sera donc prospective: d'un élément connu, les réserves mathématiques d'un groupe à l'âge $x'+1$, nous passerons à la recherche d'un élément inconnu, les réserves mathématiques du groupe à l'âge x'. D'après la méthode de Fouret, les calculs se font du passé au futur; dans la méthode dérivée, ils se feront, au contraire, du futur au passé, dans chaque cas en tenant compte du mouvement qui se produit dans le portefeuille au cours d'une année. Mais, dans les entreprises d'assurances, on calcule les réserves mathématiques année après année dès la conclusion du contrat jusqu'à son échéance. Par conséquent, on remarque immédiatement que la nouvelle méthode ne sera guère utilisable dans la pratique. Elle n'en présente pas moins un intérêt théorique certain. Nous allons l'étudier dans le cadre des assurances mixtes.

Assurances mixtes

Nous supposons connue la réserve mathématique à la fin de l'année $(t+1)$ d'une police dont l'âge d'entrée est x et la durée n, et nous nous proposons de trouver la réserve à la fin de l'année t.

Partons de nouveau de la formule de récurrence des réserves mathématiques:

$$l_{x+t}({}_tV_{x:\overline{n}|}+P) = v(d_{x+t}+l_{x+t+1\,t+1}V_{x:\overline{n}|}). \tag{150}$$

Nous aurons:

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = v(q_{x+t}+p_{x+t\,t+1}V_{x:\overline{n}|})-P. \tag{151}$$

Comparons cette dernière formule, qui est prospective, avec la formule rétrospective (143), après les avoir transformées toutes deux quelque peu:

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = vq_{x'}+{}_1E_{x'\,t+1}V_{x:\overline{n}|}-P, \tag{151'}$$

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = {}_1I_{x'-1}({}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}+P)-\frac{q_{x'-1}}{p_{x'-1}} \tag{143'}$$

où $x'=x+t$.

Dans la première formule, la réserve mathématique est exprimée comme valeur actuelle du capital 1 assuré en cas de décès, payable à la fin de l'année, augmentée de la valeur actuelle de la réserve mathématique à la fin de la $(t+1)^{e}$ année et diminuée de la prime.

D'après la seconde formule, la réserve mathématique à l'âge x' est égale à la différence entre la valeur finale de la réserve mathématique de l'année précédente augmentée de la prime, et de la valeur finale du risque.

Ces deux formules se correspondent l'une à l'autre dans la transformation «prospectif-rétrospectif». En effet, l'âge $x'+1$ correspond à l'âge $x'-1$; puis $vq_{x'}$, ${}_1E_{x'\,t+1}V_{x:\overline{n}|}$ et P correspondent respectivement à $\frac{q_{x'-1}}{p_{x'-1}}$, à ${}_1I_{x'-1\,t-1}V_{x:\overline{n}|}$ et à ${}_1I_{x'-1}P$.

Si nous considérons maintenant un groupe de polices, les assurés étant tous âgés de x' à l'inventaire, la formule (151') nous conduit à:

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = vq_{x'}\sum C+vp_{x'}\sum C_{t+1}V_{x:\overline{n}|}-\sum P,$$

$$\sum C\,{}_tV_{x:\overline{n}|} = v\sum C-\sum P-vp_{x'}(\sum C-\sum C_{t+1}V_{x:\overline{n}|}). \tag{152}$$

Les réserves mathématiques du groupe à l'âge x' sont exprimées en fonction des réserves mathématiques à l'âge $(x'+1)$ ou en fonction des capitaux sous le risque à l'âge $(x'+1)$.

Lorsqu'on considère une seule assurance, on peut bien obtenir de proche en proche, au moyen de la formule (151'), toutes les réserves mathématiques en partant, pour l'assurance mixte, de ${}_nV_{x:\bar{n}|} = 1$, pour $t+1 = n$, et en posant ensuite successivement $t+1$ égal à $n-1$, $n-2$, etc. Les réserves obtenues sont valables tant que l'assurance est en cours.

Mais, si l'on a un portefeuille d'assurances, qui diminue par les sorties normales et anormales et augmente par les nouvelles entrées, on ne sait pas, au moment de l'inventaire, quelle sera son importance à la fin de l'année suivante. La formule ci-dessus, c'est-à-dire la méthode dérivée de celle de Fouret, n'est d'aucun secours pour calculer les réserves mathématiques du groupe au moment considéré.

III. Une nouvelle méthode: La méthode «récurrence-risque»

En cherchant la méthode dérivée de la méthode de Fouret, nous avons trouvé une formule dans laquelle interviennent les capitaux sous le risque, soit la différence entre les capitaux assurés du groupe considéré et les réserves mathématiques à l'âge $(x'+1)$. Il est facile d'introduire la somme sous le risque dans la formule de récurrence de la réserve mathématique. Cela nous permettra de trouver une nouvelle forme de la méthode de Fouret.

1° Assurances mixtes

Introduisons le capital sous le risque dans la formule de récurrence:

$$ {}_{t-1}V_{x:\bar{n}|} + P = v q_{x+t-1} + v p_{x+t-1}\, {}_tV_{x:\bar{n}|}. $$

Il vient:

$$ 1 - {}_{t-1}V_{x:\bar{n}|} = P + (1-v) + v p_{x+t-1}(1 - {}_tV_{x:\bar{n}|}); \qquad (153) $$

ou, en désignant par d le taux d'escompte:

$$ C(1 - {}_tV_{x:\bar{n}|}) = C\,\frac{D_{x+t-1}}{D_{x+t}}\left[(1 - {}_{t-1}V_{x:\bar{n}|}) - (P+d)\right]. \qquad (154) $$

Après avoir introduit un nouveau symbole ${}_tR_{x:\bar{n}|}$ qui désigne le capital sous le risque à la fin de la t^e année écoulée, la dernière relation peut se mettre, en vue du calcul par groupes, sous la forme:

$$ \sum C\, {}_tR_{x:\bar{n}|} = {}_1I_{x'-1}\left[\sum C\, {}_{t-1}R_{x:\bar{n}|} - \sum (P+Cd)\right]. \qquad (155) $$

C'est l'expression de la nouvelle méthode, «récurrence-risque», qui, comme celle de Fouret, est une méthode de récurrence. Mais, cette fois, la formule de récurrence s'établit pour les capitaux sous le risque et non pas pour les réserves mathématiques. L'application de la méthode est facile: On groupe les contrats par âges à l'inventaire, sans se préoccuper de leur durée, ou, ce qui revient au même, par années de naissance. On connaît le capital sous le risque du groupe considéré à la fin de l'exercice précédent. La formule de récurrence (155) permet de trouver très rapidement le capital sous le risque, puis les réserves mathématiques à l'âge x'. Mais, comme dans la méthode de Fouret, il faut avoir soin d'écarter, au préalable, les assurances sorties du groupe au cours de l'exercice et d'y incorporer les nouvelles assurances. Pour ces dernières, le capital sous le risque au moment de l'entrée est égal au capital assuré C.

La méthode «récurrence-risque» est mathématiquement exacte. Nous en donnons un exemple numérique.

Exemple numérique 8: Nous avons calculé le capital sous le risque du groupe de polices de l'exemple numérique 1 pour le 1er juillet 1959 et trouvé fr. 61 321. Nous voulons calculer la réserve mathématique pour le 1er juillet 1960 selon la table SM 1948/53 à 2½%. L'âge à l'inventaire $x' = 45$.

Nous appliquons la formule (155) pour calculer les capitaux sous le risque du 1er juillet 1960:

$$\sum C_t R_{x:\overline{n}|} = 1{,}02966 \cdot (61\,321 - 6\,585{,}94),$$
$$\sum C_t R_{x:\overline{n}|} = 56\,359.$$

Puis, nous passons au calcul de la réserve mathématique:

$$\sum C_t V_{x:\overline{n}|} = \sum C - \sum C_t R_{x:\overline{n}|},$$
$$\sum C_t V_{x:\overline{n}|} = 112\,000 - 61\,321,$$
$$\sum C_t V_{x:\overline{n}|} = 55\,641.$$

Pour le même groupe, nous avons trouvé les résultats suivants:

Méthodes	Réserves mathématiques
Méthode individuelle	55 644
Méthode de Fouret	55 642
Méthode «récurrence-risque»	55 641

Rappelons que les trois méthodes sont mathématiquement exactes et que les différences proviennent de ce que les nombres de commutation et les valeurs actuarielles sont arrondis.

Dans les assurances au décès vie-entière et temporaire, les formules de la nouvelle méthode sont analogues à la formule (155).

Si nous comparons les formules des deux méthodes, nous voyons que la méthode «récurrence-risque» possède un avantage sensible sur celle de Fouret. Dans cette dernière, on a trois sommes à calculer, et le coefficient de la troisième est variable en fonction de l'âge x' à l'inventaire. Dans la méthode «récurrence-risque», en revanche, on a deux sommes et chacune d'elles s'obtient très facilement. La deuxième somme celle de $(P + C\,d)$, ne dépend d'aucune variable et reste constante aussi longtemps qu'aucune modification du groupe considéré n'intervient. Ce fait rend la nouvelle méthode plus rapide que la méthode de Fouret.

2° Assurances de capitaux différés sans contre-assurance

Transformons la formule de récurrence du capital différé:

$$_{t-1}V_x(_nE_x) + P = v\,p_{x+t-1}\,{}_tV_x(_nE_x)$$

de manière à y introduire la différence $(_{n-t}E_{x+t} - {}_tV_x(_nE_x))$. On a:

$$\begin{aligned} {}_{n-t+1}E_{x+t-1} - {}_{t-1}V_x(_nE_x) &= P + v\,p_{x+t-1}(_{n-t}E_{x+t} - {}_tV_x(_nE_x)) \\ &\quad - v\,p_{x+t-1}\,{}_{n-t}E_{x+t} + {}_{n-t+1}E_{x+t-1}; \end{aligned} \tag{156}$$

d'où, en posant ${}_tR_x(_nE_x) = {}_{n'}E_{x'} - {}_tV_x(_nE_x)$, il vient:

$$_{t-1}R_x(_nE_x) = P + v\,p_{x'-1}\,{}_tR_x(_nE_x), \tag{157}$$

ou bien:

$${}_tR_x(_nE_x) = {}_1I_{x'-1}(_{t-1}R_x(_nE_x) - P), \tag{158}$$

et, pour un groupe d'assurés âgés de x' à l'inventaire, on aura en définitive:

$$\sum C\,{}_tR_x(_nE_x) = {}_1I_{x'-1}(\sum C\,{}_{t-1}R_x(_nE_x) - \sum P). \tag{159}$$

3° Assurances à terme fixe en cours

Le capital sous le risque de cette assurance est la différence entre la valeur actuelle du capital assuré au moment t et la réserve mathématique. Posons donc:

$${}_tR_x^{(n)} = (v^{n'} - {}_tV_x^{(n)}),$$

et introduisons cette différence dans la formule de récurrence:

$$ {}_{t-1}V_x^{(n)} + P = v q_{x'-1} v^{n'} + v p_{x'-1}\, {}_tV_x^{(n)}, $$

il vient:

$$ v^{n'+1} - {}_{t-1}V_x^{(n)} = P + v^{n'+1} - v q_{x'-1} v^{n'} + v p_{x'-1}(v^{n'} - {}_tV_x^{(n)}) - v^{n'+1} p_{x'-1} $$

$$ {}_{t-1}R_x^{(n)} = P + v p_{x'-1}\, {}_tR_x^{(n)} $$

et

$$ {}_tR_x^{(n)} = {}_1I_{x'-1}({}_{t-1}R_x^{(n)} - P). \qquad (160) $$

La nouvelle formule de récurrence, pour un groupe de polices d'âge x' à l'inventaire, est:

$$ \sum C\, {}_tR_x^{(n)} = {}_1I_{x'}(\sum C\, {}_{t-1}R_x^{(n)} - \sum P). \qquad (161) $$

Voyons, dans un exemple numérique, l'application de la présente méthode.

Exemple numérique 9: Nous supposons connu le capital sous le risque de l'exemple numérique 4, pour le 1er juillet 1959, qui est fr. 29 646, et nous voulons calculer la réserve mathématique du groupe pour l'année suivante, soit pour le 1er juillet 1960. Bases techniques: SM 1948/53 à 2½%. L'âge à l'inventaire $x' = 40$.

Nous calculons d'abord le capital sous le risque pour le 1er juillet 1960:

$$ \sum C\, {}_tR_x^{(n)} = 1{,}02815 \cdot (29\,646 - 3\,500{,}52), $$
$$ \sum C\, {}_tR_x^{(n)} = 26\,881. $$

Maintenant, nous passons au calcul de la réserve mathématique totale:

$$ \sum C\, {}_tV_x^{(n)} = \sum C v^{n'} - \sum C\, {}_tR_x^{(n)}, $$
$$ \sum C\, {}_tV_x^{(n)} = (63\,414 - 26\,881), $$
$$ \sum C\, {}_tV_x^{(n)} = \underline{36\,533}. $$

Pour le même exemple numérique, nous avons obtenu les résultats suivants:

Méthodes	Réserves mathématiques
Méthode individuelle	36 536
Méthode de Fouret	36 534
Méthode «récurrence-risque»	36 533

Les trois méthodes sont exactes; les différences insignifiantes proviennent de ce que les nombres de commutation et les autres valeurs actuarielles sont arrondis.

On pourrait maintenant chercher la méthode dérivée de la nouvelle méthode «récurrence-risque» au moyen de la transformation «rétrospectif-prospectif». Il s'agirait de calculer le capital sous le risque de la t^e année sachant que celui de la $(t+1)^e$ année est connu. En effet, pour l'assurance mixte par exemple, on aura la formule de récurrence suivante:

$$ {}_tR_{x:\overline{n}|} = {}_1E_{x'\,t+1}R_{x:\overline{n}|} + P + d \quad \text{où } d = 1 - v. \tag{162}$$

Et, pour un groupe de polices dont les assurés sont âgés de x' à l'inventaire, on écrira:

$$ \sum C_{\,t}R_{x:\overline{n}|} = {}_1E_{x'} \sum C_{\,t+1}R_{x:\overline{n}|} + \sum (P + Cd). \tag{163}$$

La somme sous le risque du groupe, à l'âge x', est exprimée en fonction de la somme sous le risque à l'âge $(x'+1)$.

Nous pourrions reprendre ici les mêmes considérations que celles que nous avons formulées pour la méthode dérivée de celle de Fouret. La conclusion serait que la formule ci-dessus, c'est-à-dire la méthode dérivée de la méthode «récurrence-risque», n'est d'aucun secours pour calculer les réserves mathématiques du groupe à l'inventaire.

IV. Critique de la méthode de Fouret et de la méthode «récurrence-risque»

La méthode de Fouret et la nouvelle méthode «récurrence-risque» sont plus rapides que les autres méthodes de groupement. Elles sont générales et exactes. La précision qu'elles offrent, est très bonne. Cependant, comme il s'agit de méthodes de récurrence, toute erreur ou omission qu'on commettrait, se reporterait sur les résultats des années suivantes. Pour éviter la répétition d'erreurs éventuelles, MM. Dumas et Berger ont préconisé l'emploi de la méthode de Fouret avec un contrôle périodique au moyen de la méthode individuelle. On calculerait, par exemple, tous les 5 ans les réserves individuelles, et entre temps, on utiliserait la méthode de Fouret. On peut également étendre ces considérations à la méthode «récurrence-risque».

Le seul inconvénient que présentent ces méthodes est qu'il faut calculer individuellement les réserves mathématiques ou les capitaux sous le risque pour les contrats sortant du portefeuille en cours d'exercice.

Considérations générales sur la deuxième partie

Partant de la correspondance «prospectif-rétrospectif» ou «rétrospectif-prospectif» définie, nous avons pu établir de nouvelles méthodes ou en retrouver de connues, dites méthodes dérivées, présentant un parallélisme intéressant avec les méthodes primitives. La plupart de ces nouvelles méthodes se prêtent avantageusement à l'emploi dans la pratique. Les exemples numériques donnés illustrent ce fait, tant du point de vue de la facilité de leur application que de celui de la précision des résultats obtenus.

Nous nous sommes limité à l'étude de quelques-unes des méthodes connues, les plus caractéristiques, et de leurs méthodes dérivées.

Un très grand nombre de méthodes de calcul par groupes des réserves mathématiques ont été proposées au cours des années. Il est clair qu'on peut appliquer la transformation «prospectif-rétrospectif» à celles qui sont fondées sur la formule prospective de calcul de la réserve mathématique, et la transformation «rétrospectif-prospectif» à celles qui reposent sur la formule rétrospective. On dispose ainsi d'un moyen de trouver de nouvelles méthodes ou d'éclairer sous un nouveau jour des méthodes déjà connues.

D'autre part, la correspondance «prospectif-rétrospectif» ou «rétrospectif-prospectif» étudiée dans cette partie permet de classer les méthodes de groupement des polices, pour le calcul des réserves mathématiques, en deux catégories, chaque méthode de la première catégorie correspondant à une méthode de la seconde, et réciproquement. Pour les méthodes étudiées, nous avons fait la classification suivante:

Méthodes prospectives	Méthodes rétrospectives
Méthode d'Altenburger	Méthode U
Méthode d'Altenburger généralisée	Méthode U
Méthode de Whiting	Méthode $U^{(w)}$
Méthode de Lidstone	Méthode «t»
Méthode dérivée de celle de Fouret	Méthode de Fouret
Méthode dérivée de la méthode «récurrence-risque»	Méthode «récurrence-risque»

Les méthodes dérivées de celle de Fouret et de la méthode «recurrence-risque» ont ceci de particulier qu'elles ne sont d'aucun secours

pour le calcul, dans la pratique, des réserves mathématiques d'un groupe de polices.

En principe, les méthodes des deux catégories peuvent généralement être utilisées dans la pratique. Cependant, on estime parfois que les méthodes prospectives sont plus souples et plus facilement interprétables en cas de changement des bases techniques.

TROISIÈME PARTIE

APPLICATION DES MÉTHODES DÉRIVÉES AUX ASSURANCES D'INVALIDITÉ ET DE SURVIVANTS

Dans cette partie, nous nous efforcerons d'appliquer les méthodes dérivées que nous avons obtenues, aux assurances d'invalidité et de survivants. Nous verrons si cela présente des difficultés ou si, au contraire, les méthodes dérivées se prêtent avantageusement à l'emploi pratique.

L'application des méthodes de Lidstone, d'Altenburger et de Fouret aux assurances d'invalidité et de survivants a été étudiée par M. Dasen [1]). De notre côté, nous chercherons à étendre les nouvelles méthodes à ces mêmes assurances afin de compléter notre étude. Pour ce faire, il nous faudra introduire quelques notations spéciales non utilisées jusqu'ici et définir chacune d'elles. Après avoir déterminé les formules des méthodes dérivées, nous montrerons que leur application pratique présente souvent de réels avantages et quelles précautions il convient de prendre pour rendre leur emploi pratique rationnel.

Notre étude se fera pour les principales combinaisons des assurances d'invalidité et de survivants. Nous espérons parvenir pour chaque cas à des résultats offrant un intérêt majeur tant sur le plan pratique que sur le plan théorique.

La plupart des nouveaux symboles qui vont suivre sont définis dans les «Bases techniques pour l'assurance de groupes» établies par le Bureau fédéral des assurances, Berne 1931; les autres en sont déduits par analogie.

---

[1]) Voir «Extension des méthodes de Lidstone, Altenburger et Fouret au calcul par groupes des réserves mathématiques dans l'assurance vie, invalidité et survivants», 1936, Stæmpfli & C[ie], Berne.

Chapitre I

Application de la méthode U aux assurances d'invalidité et de survivants

L'introduction des nombres auxiliaires $\overline{K}$ et de l'âge initial σ est nécessaire pour l'application de la méthode dérivée U aux assurances d'invalidité et de survivants. Cela permet, comme dans l'assurance sur la vie, de faire dépendre le calcul des réserves mathématiques d'un groupe de polices uniquement de l'âge atteint à l'inventaire. Notre méthode se base sur la formule rétrospective de la réserve mathématique; nous utiliserons donc de nouvelles notations pour les valeurs finales de la rente et du risque. A notre connaissance, la réserve mathématique par la formule rétrospective est très peu ou pas du tout étudiée dans les assurances en question. Les notations adoptées dans la pratique reposent sur la définition de la réserve mathématique selon la formule prospective. Mais, l'introduction des nouvelles notations n'apporte aucune complication.

I. Assurances temporaires de capitaux payables en cas de décès à l'état d'actif

1° Capitaux constants

La réserve mathématique, après t années, d'une assurance donnant droit à un capital C payable immédiatement en cas de décès survenant avant l'âge-terme, à l'état d'actif, l'assuré payant une prime annuelle P durant toute son activité mais au plus tard jusqu'à l'échéance de l'assurance, s'écrit selon la méthode rétrospective:

$$C\,{}_tV_x = P\,\bar{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} - C\,{}_{|t}\bar{S}^{aa}_x, \tag{164}$$

En introduisant les nombres de commutation, puis l'âge σ par addition et par soustraction de $P\,\dfrac{N^{aa}_\sigma}{D^{aa}_{x'}}$ et $C\,\dfrac{\overline{M}^{aa}_\sigma}{D^{aa}_{x'}}$, cette formule peut être mise sous la forme:

$$C\,{}_tV_x = P\,\bar{s}^{aa}_{\sigma:x'-\sigma|} - C\,{}_{|x'-\sigma}\bar{S}^{aa}_\sigma - \frac{1}{D^{aa}_{x'}}\left[P(N^{aa}_\sigma - N^{aa}_x) - C(\overline{M}^{aa}_\sigma - \overline{M}^{aa}_x)\right] \tag{165}$$

où:
$$\bar{s}^{aa}_{\sigma:x'-\sigma|} = \frac{N^{aa}_\sigma - N^{aa}_{x'}}{D^{aa}_{x'}} \quad \text{et} \quad {}_{|x'-\sigma}\bar{S}^{aa}_\sigma = \frac{\overline{M}^{aa}_\sigma - \overline{M}^{aa}_{x'}}{D^{aa}_{x'}}.$$

Ce sont respectivement: la valeur finale de la rente temporaire d'actif et la valeur finale du risque de décès à l'état d'actif.

Le coefficient de la méthode U:

$$\overline{K}^{aa} = [P(N_\sigma^{aa} - N_x^{aa}) - C(\overline{M}_\sigma^{aa} - \overline{M}_x^{aa})],$$

est indépendant de l'âge atteint à l'inventaire. Il est constant et peut être calculé et inscrit sur chaque carte technique au début de l'assurance, une fois pour toutes.

Pour un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire, les réserves mathématiques des assurances temporaires en cas de décès à l'état d'activité sont données par la formule:

$$\sum C\,{}_tV_x = \breve{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}^{aa} \sum P - {}_{x'-\sigma}\overline{S}_\sigma^{aa} \sum C - \frac{1}{D_{x'}^{aa}} \sum \overline{K}^{aa}. \qquad (166)$$

L'introduction de l'âge σ nous permet d'obtenir les réserves mathématiques en fonction des valeurs finales d'actif qui ne dépendent que de l'âge atteint à l'inventaire; cet âge est la seule quantité variable de cette formule.

2° Capitaux croissants

Si le capital payable en cas de décès à l'état d'actif croît en progression arithmétique à partir de C avec les années de service, la réserve mathématique rétrospective, après t années écoulées, se calcule selon la formule:

$$C\,{}_tV_x = P\,\breve{s}_{x:\overline{t}|}^{aa} - C\,{}_{|t}(I\overline{S})_x^{aa}. \qquad (167)$$

Après avoir exprimé la formule en nombres de commutation, ajouté et soustrait $P\frac{N_\sigma^{aa}}{D_{x'}^{aa}}$, $C\frac{\overline{R}_\sigma^{aa}}{D_{x'}^{aa}}$ et $C(x-\sigma)\frac{M_\sigma^{aa}}{D_{x'}^{aa}}$, elle peut se mettre sous la forme:

$$C\,{}_tV_x = P\,\breve{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}^{aa} - [C\,{}_{x'-\sigma}(I\overline{S})_\sigma^{aa} - (x-\sigma)\,C\,{}_{x'-\sigma}\overline{S}_\sigma^{aa}] - \frac{1}{D_{x'}^{aa}}\overline{K}, \quad (168)$$

où le coefficient de la méthode U est:

$$\overline{K}^{aa} = [P(N_\sigma^{aa} - N_x^{aa}) - C(\overline{R}_\sigma^{aa} - \overline{R}_x^{aa} - (x-\sigma)\,\overline{M}_\sigma^{aa})].$$

En vue du calcul par groupe de même âge x' à l'inventaire des réserves, nous aurons: (169)

$$\sum C\,{}_tV_x = \breve{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}^{aa} \sum P - [{}_{x'-\sigma}(I\overline{S})_\sigma^{aa} \sum C - {}_{|x'-\sigma}\overline{S}_\sigma^{aa} \sum (x-\sigma)\,C] - \frac{1}{D_{x'}^{aa}} \sum \overline{K}^{aa}.$$

Nous voyons que la méthode U s'applique bien à cette forme d'assurance. Pour effectuer rapidement les calculs, on peut établir, au préalable, des tableaux donnant les facteurs qui dépendent de l'âge à l'inventaire. Comme nous l'avons fait dans l'assurance sur la vie, ici aussi nous pouvons proposer l'établissement d'une table de nombres de commutation commençant à l'âge σ, ce qui facilite beaucoup les calculs. Outre le coefficient $\overline{K}^{ai}$, il faut inscrire, dès la souscription, le nombre constant $(x-\sigma)\,C$ sur chaque carte technique.

II. Assurances temporaires de capitaux payables en cas d'invalidité

1° Capitaux constants

La réserve mathématique, après t années, d'un assuré actif ayant droit à un capital déterminé C payable immédiatement en cas d'invalidité survenant avant l'âge-terme et payant une prime annuelle P, est selon la formule rétrospective:

$$C\,{}_tV_x = P\,s^{ai}_{x:\overline{t}|} - C\,[{}_t\overline{S}^{ai}_x]. \qquad (170)$$

Ajoutons et soustrayons $P\,\dfrac{N^{ai}_\sigma}{D^{ai}_x}$ et $C\,\dfrac{[\overline{M}^{ai}_\sigma]}{D^{ai}_x}$ au deuxième membre de cette formule. Après simplification, nous obtenons, pour un groupe de polices de même âge x' à l'inventaire, la formule:

$$\underline{\Sigma}\,C\,{}_tV_x = s^{ai}_{\sigma:x'-\sigma}\,\underline{\Sigma}\,P - [{}_{x'-\sigma}\overline{S}^{ai}_\sigma]\,\underline{\Sigma}\,C - \frac{1}{D^{ai}_{x'}}\,\underline{\Sigma}\,\overline{K}^{ai}, \qquad (171)$$

où:

$$[{}_{x'-\sigma}\overline{S}^{ai}_\sigma] = \frac{[\overline{M}^{ai}_\sigma] - [\overline{M}^{ai}_{x'}]}{D^{ai}_{x'}}.$$

Le coefficient de la nouvelle méthode a pour expression:

$$\overline{K}^{ai} = [P(N^{ai}_\sigma - N^{ai}_x) - C([\overline{M}^{ai}_\sigma] - [\overline{M}^{ai}_x])].$$

2° Capitaux croissants

Au cas où les capitaux assurés croissent en progression arithmétique à partir de C avec les années de service, la réserve mathématique rétrospective après t années écoulées sera, pour un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire, la suivante:

$$\sum {}_tV_x = \bar{g}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} \sum P - [[_{x'-\sigma}(I\bar{S})^{ai}_{\sigma}] \sum C - [{}_{x'-\sigma}\bar{S}^{ai}_{\sigma}] \sum (x-\sigma) C] - \frac{1}{D^{aa}_{x'}} \sum \overline{K}^{ai},$$

où le coefficient de la méthode dérivée est: (172)

$$\overline{K}^{ai} = [P(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{x}) - C([\bar{R}^{ai}_{\sigma}] - [\bar{R}^{ai}_{x}] - (x-\sigma)[\bar{M}^{ai}_{\sigma}])].$$

Notre dernière formule présente une analogie parfaite avec la formule (169). Tout ce que nous avons fait remarquer au sujet de son application, est ici également valable.

III. Rentes viagères d'invalidité assurées temporairement

1° Rentes viagères constantes

La réserve mathématique, après t années, d'un assuré actif ayant droit à une rente de r payable en cas d'invalidité survenant avant l'âge-terme, la première fois au début de l'invalidité au prorata du temps restant à courir jusqu'à la fin de l'année d'assurance en cours, puis au commencement de chaque année d'assurance jusqu'au décès, moyennant une prime annuelle P payable durant toute l'activité, mais au plus pendant n années, est, d'après la formule rétrospective:

$${}_tV_x = P\bar{g}^{aa}_{x:\overline{t}|} - r\bar{g}^{ai(x')}_{x} \qquad (173)$$

avec la nouvelle notation:

$$\bar{g}^{ai(x')}_{x} = \frac{N^{ai}_{x} - N^{ai}_{x'}}{D^{aa}_{x'}}.$$

Introduisons l'âge initial σ en ajoutant et retranchant au deuxième membre de la formule (173) $P\dfrac{N^{aa}_{\sigma}}{D^{aa}_{x'}}$ et $r\dfrac{N^{ai}_{\sigma}}{D^{aa}_{x'}}$. Il vient:

$${}_tV_x = P\bar{g}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}} - r\bar{g}^{ai(x')}_{\sigma} - \frac{1}{D^{aa}_{x'}} \overline{K}^{ai(x')}. \qquad (174)$$

La réserve mathématique totale, pour un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire, peut s'écrire:

$$\sum {}_tV_x = \bar{g}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}} \sum P - \bar{g}^{ai(x')}_{\sigma} \sum r - \frac{1}{D^{aa}_{x'}} \sum \overline{K}^{ai(x')}. \qquad (175)$$

Le coefficient de la méthode dérivée est, pour cette assurance:

$$\overline{K}^{ai(x')} = [P(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{x}) - r(N^{ai}_{\sigma} - N^{ai}_{x})].$$

Le calcul du nouveau facteur $\bar{s}_{\sigma}^{ai(x')}$ de capitalisation, que nous appellerons la valeur finale de la rente d'invalidité assurée temporairement, ne soulève aucune difficulté. En vue du calcul par groupes, on peut établir un tableau fournissant ses valeurs pour des diverses périodes d'inventaire.

2° Rentes viagères croissantes

Le problème est le même que le précédent, sauf que la rente croît en progression arithmétique avec les années de service: $r, 2r, \ldots, nr$. La réserve mathematique, à la fin de la t^e année, s'obtient par la formule rétrospective suivante:

$$ {}_tV_x = P\,\bar{s}_{x:\overline{t}|}^{aa} - r(I\bar{s})_x^{ai(x')}, \tag{176}$$

où nous avons posé:

$$(I\bar{s})_{x'}^{ai(x')} = \frac{S_x^{ai} - S_{x'}^{ai} - tN_{x'}^{ai}}{D_{x'}^{aa}}.$$

Pour introduire l'âge initial σ, on peut ajouter et soustraire dans le deuxième membre les termes $P\dfrac{N_{\sigma}^{aa}}{D_{x'}^{aa}}$, $r\dfrac{S_{\sigma}^{ai}}{D_{x'}^{aa}}$ et $(x-\sigma)\,r\dfrac{N_{\sigma}^{ai}}{D_{x'}^{aa}}$.

Nous trouvons aisément la formule de la méthode U:

$${}_tV_x = P\,\bar{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}^{aa} - \left[r(I\bar{s})_{\sigma}^{ai(x')} - (x-\sigma)\,r\bar{s}_{\sigma}^{ai(x')}\right] - \frac{1}{D_{x'}^{aa}}\,\overline{K}^{ai(x')} \tag{177}$$

avec le coefficient:

$$\overline{K}^{ai(x')} = \left[P(N_{\sigma}^{aa} - N_x^{aa}) - r(S_{\sigma}^{ai} - S_x^{ai} - (x-\sigma)\,N_{\sigma}^{ai})\right].$$

Enfin, la formule donnant la réserve mathématique totale pour un groupe de contrats de même âge x' à l'inventaire, s'écrit:

$$\sum {}_tV_x = \bar{s}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}^{aa} \sum P - \left[(I\bar{s})_{\sigma}^{ai(x')} \sum r - \bar{s}_{\sigma}^{ai(x')} \sum (x-\sigma)\,r\right] - \frac{1}{D_{x'}^{aa}} \sum \overline{K}^{ai(x')}. \tag{178}$$

Le nouveau facteur de capitalisation $(I\bar{s})_{\sigma}^{ai(x')}$ est, selon notre définition, la valeur finale de la rente croissante d'invalidité assurée temporairement. Il dépend, comme tous les autres facteurs, de la seule variable x': son calcul peut être facilité par l'établissement préalable d'un tableau.

IV. Rentes temporaires d'invalidité

1° Rentes constantes

La réserve mathématique, après t années, d'un assuré actif ayant droit à une rente r payable en cas d'invalidité survenant avant l'échéance du contrat, la première fois au prorata du temps restant à courir jusqu'à la fin de l'année d'assurance en cours, puis au commencement de chaque année d'assurance jusqu'à l'âge-terme, moyennant une prime annuelle P tant que dure l'activité, toutefois au plus tard jusqu'à l'âge-terme, s'écrit en vertu de la formule rétrospective:

$$ {}_tV_x = P\,\bar{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} - r\,\bar{s}^{ai(x')}_{x:\overline{s-x}|} \quad \text{où } s = x+n. \tag{179}$$

Le deuxième terme du membre de droite est la valeur actuelle, au moment t, de la rente d'invalidité prenant naissance avant l'âge x' à l'inventaire, payable jusqu'à l'âge-terme s. Il a pour expression:

$$ \bar{s}^{ai(x')}_{x:\overline{s-x}|} = \frac{N^{ai}_{x:\overline{s-x}} - N^{ai}_{x':\overline{s-x'}}}{D^{aa}_{x'}}. $$

Nous introduisons σ par l'addition et la soustraction, au deuxième membre de la formule (179), des termes $P\dfrac{N^{aa}_{\sigma}}{D^{aa}_{x'}}$ et $r\dfrac{N^{ai}_{\sigma:\overline{s-\sigma}|}}{D^{aa}_{x'}}$. Il vient:

$$ {}_tV_x = P\,\bar{s}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} - r\,\bar{s}^{ai(x')}_{\sigma:\overline{s-\sigma}|} - \frac{1}{D^{aa}_{x'}}\,\overline{K}^{ai}_{s} \tag{180}$$

avec le coefficient de la méthode U:

$$ \overline{K}^{ai}_{s} = \left[P(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{x}) - r(N^{ai}_{\sigma:\overline{s-\sigma}|} - N^{ai}_{x:\overline{s-x}|})\right]. $$

Pour un groupe de contrats de même âge x' à l'inventaire, on aura la réserve mathématique totale:

$$ \sum {}_tV_x = \bar{s}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}} \sum P - \bar{s}^{ai(x')}_{\sigma:\overline{s-\sigma}} \sum r - \frac{1}{D^{aa}_{x'}} \sum \overline{K}^{ai}_{s}. \tag{181}$$

2° Rentes croissantes

Si les rentes d'invalidité temporaires, au lieu d'être constantes, croissent en progression arithmétique avec les années de service, la

réserve mathématique individuelle se calcule par la formule rétrospective suivante:

$$ {}_tV_x = P\ddot{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} - r(I\ddot{s})^{ai(x')}_{x:\overline{s-x}|}, \tag{182}$$

où nous avons:

$$(I\ddot{s})^{ai(x')}_{x:\overline{s-x}|} = \frac{S^{ai}_{x:\overline{s-x}|} - S^{ai}_{x':\overline{s-x'}|}}{D^{aa}_{x'}}.$$

Ajoutons et soustrayons au deuxième membre de la formule (182) les termes $P\frac{N^{aa}_{\sigma}}{D^{aa}_{x'}}$ et $r\frac{S^{ai}_{\sigma:\overline{s-\sigma}|}}{D^{aa}_{x'}}$. Nous obtenons alors:

$$ {}_tV_x = P\ddot{s}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} - r(I\ddot{s})^{ai(x')}_{\sigma:\overline{s-\sigma}|} - \frac{1}{D^{aa}_{x'}}\overline{K}^{ai}_{s}. \tag{183}$$

Le coefficient de la méthode U est:

$$\overline{K}^{ai}_{s} = [P(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{x}) - r(S^{ai}_{\sigma:\overline{s-\sigma}|} - S^{ai}_{x:\overline{s-x}|})].$$

Finalement, pour un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire, il vient:

$$\sum {}_tV_x = \ddot{s}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|}\sum P - (I\ddot{s})^{ai(x')}_{\sigma:\overline{s-\sigma}|}\sum r - \frac{1}{D^{aa}_{x'}}\sum \overline{K}^{ai}_{s}. \tag{184}$$

V. Assurances de rentes de veuves

1° Rentes constantes

Considérons une assurance de rente de veuve conclue par un mari d'âge x en faveur de sa femme âgée de y. L'assurance donne droit à une rente de r payable pendant la durée du veuvage, la première fois au commencement de l'année d'assurance qui suit celle du décès du mari, moyennant paiement d'une prime annuelle P pendant la durée de la vie commune, tant que le mari est actif, toutefois pendant n années au plus. Après t années, la réserve mathématique d'un assuré, actif, se calcule par la formule rétrospective:

$$ {}_tV_{x|y} = P\ddot{s}^{aa}_{xy:\overline{t}|} - r\ddot{s}^{w}_{x|y:\overline{t}|}. \tag{185}$$

Le nouveau facteur de capitalisation $\ddot{s}^{w}_{x|y:\overline{t}|}$ est la valeur finale des prestations, qui a pour expression:

$$\ddot{s}^{w}_{x|y:\overline{t}|} = \frac{N^{w}_{x|y} - N^{w}_{x',y'}}{D_{x'y'}}.$$

Introduisons le couple d'âges initiaux σ et $\sigma-\Delta$, où Δ est la différence d'âges entre les époux. Pour ce faire, ajoutons et soustrayons les termes $P\dfrac{N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta}}{D^{aa}_{x'y'}}$ et $r\dfrac{N^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta}}{D_{x'y'}}$ dans le deuxième membre de la formule (185). Nous trouvons la formule:

$$,\ {}_tV_{x|y} = P\,\breve{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta:\overline{x'-\sigma}|} - r\,\breve{s}^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta:\overline{x'-\sigma}|} - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'}}\,\overline{K}^{aa} + \frac{1}{D_{x'y'}}\,\overline{K}^{w}. \qquad (186)$$

Nous avons dans cette formule deux coefficients; l'un se rapporte aux nombres de commutation d'actifs, l'autre à ceux de veuves:

$$\overline{K}^{aa} = P(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta} - N^{aa}_{xy}) \text{ et } \overline{K}^{w} = r(N^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta} - N^{w}_{x|y}).$$

Selon la formule (186), le groupement se fait d'après les deux âges atteints à l'inventaire, x' et y'. Cela nécessite la formation d'un grand nombre de groupes et un travail relativement long. Ensuite, il faut établir des tableaux pour les valeurs des facteurs de capitalisation et calculer les coefficients de la méthode U, ce qui représente un travail important. La valeur pratique de notre méthode, pour cette assurance, reste tout à fait limitée. En vue d'y remédier, on peut substituer aux différents âges y des femmes dont les maris ont le même âge x, un âge moyen y_x. La différence d'âges pour les couples sera alors: $\Delta_x = x - y_x$. De cette manière, le groupement des contrats se fera selon l'âge du mari et dans chaque groupe formé, on aura la différence d'âges Δ_x. Nous pouvons alors écrire la formule ci-dessus sous la forme:

$${}_tV_{x'y_x} = P\,\breve{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|} - r\,\breve{s}^{w}_{\sigma\,\sigma-\Delta_x:\overline{x':\sigma}} - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\,\overline{K}^{aa} + \frac{1}{D_{x'y'_x}}\,\overline{K}^{w} \qquad (187)$$

où: $$\overline{K}^{aa} = P(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{xy_x}) \text{ et } \overline{K}^{w} = r(N^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta_x} - N^{w}_{x|y_x}).$$

La réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire s'écrira donc: (188)

$$\sum {}_tV_{x\,y_x} = \breve{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}} \sum P - \breve{s}^{w}_{\sigma\,\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|} \sum r - \left(\frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}} \sum \overline{K}^{aa} - \frac{1}{D_{x'y'_x}} \sum \overline{K}^{w}\right).$$

A notre avis, le calcul par groupes des réserves mathématiques ne se justifie dans l'assurance de veuves qu'à la condition de calculer avec la différence moyenne d'âges entre les époux. Il s'ensuit que les résultats ainsi obtenus sont approximatifs.

2° Rentes à croissance temporaire

Si la rente de veuve assurée croît en progression arithmétique pendant les n premières années, à condition que le mari ne décède pas auparavant, pour être ensuite égale au montant constant nr, la réserve mathématique s'obtient par la formule rétrospective suivante à la fin de la t^e année:

$$ {}_tV_{x|y} = P\,\ddot{s}^{aa}_{xy:\overline{t}|} - r(I\ddot{s})^{w}_{x|y:\overline{t}|}. \tag{189}$$

$(I\ddot{s})^{w}_{x|y:\overline{t}|}$ est la valeur finale de la rente de veuve à croissance temporaire, qui s'exprime par la relation:

$$ (I\ddot{s})^{w}_{x|y:\overline{t}|} = \frac{S^{w}_{x|y} - S^{w}_{x'|y'} - t\,N^{w}_{x'|y'}}{D_{x'y'}}. $$

Après avoir substitué aux différents âges des femmes un âge moyen y_x, nous introduisons σ et $\sigma - \Delta_x$ par l'addition et la soustraction des termes $P\frac{N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x}}{D^{aa}_{x'y'_x}}$, $r\frac{S^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta_x}}{D_{x'y'_x}}$ et $(x-\sigma)\,r\frac{N^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta_x}}{D_{x'y'_x}}$. Il vient:

$$ {}_tV_{x|y_x} = P\,\ddot{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|} - \left[r(I\ddot{s})^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|} - (x-\sigma)\,r\,\ddot{s}^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|}\right] $$

$$ - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\overline{K}^{aa} + \frac{1}{D_{x'y'_x}}\overline{K}^{w}, \tag{190} $$

avec les deux coefficients:

$$ \overline{K}^{aa} = P(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{xy_x}) \quad \text{et} \quad \overline{K}^{w} = r(S^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta_x} - S^{w}_{x|y_x} - (x-\sigma)\,N^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta_x}). $$

Pour un groupe d'assurés d'âge x' à l'inventaire, la réserve mathématique totale sera:

$$ \sum {}_tV^{w}_{x|y_x} = \ddot{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|}\sum P - \left[(I\ddot{s})^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|}\sum r - \ddot{s}^{w}_{\sigma|\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|}\sum (x-\sigma)\,r\right] $$

$$ - \left(\frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\sum \overline{K}^{aa} - \frac{1}{D_{x'y'_x}}\sum \overline{K}^{w}\right). \tag{191} $$

VI. Assurances de capitaux de survie payables aux veuves des actifs

La réserve mathématique d'un assuré actif d'âge x marié à une femme d'âge y ayant droit à un capital C payable immédiatement en cas de décès du mari à l'état d'actif avant l'âge-terme du contrat, la

prime annuelle P étant due pendant la vie commune tant que l'assuré est actif, mais au plus pendant n années, se calcule par la formule rétrospective ci-après:

$$C\,{}_tV^1_{x|y} = P\,\breve{s}^{aa}_{xy:\overline{t}|} - C\,{}_{|t}\overline{S}^{aa}_{xy}, \tag{192}$$

où nous avons:

$${}_{|t}\overline{S}^{aa}_{xy} = \frac{\overline{M}^{aa}_{xy} - \overline{M}^{aa}_{x'y'}}{D^{aa}_{x'y'}}.$$

Pour l'application de notre méthode dérivée, l'introduction de l'âge moyen y'_x des femmes est indispensable. Introduisons le couple initial σ et $\sigma - \Delta_x$ de façon habituelle. Nous aurons la formule:

$$C\,{}_tV^1_{x|y_x} = P\,\breve{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|} - C\,{}_{|x'-\sigma}\overline{S}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\,\overline{K}^{aa(w)}, \tag{193}$$

où le coefficient de la méthode U est:

$$\overline{K}^{aa(w)} = \left[P(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{xy_{x'}}) - C(\overline{M}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - \overline{M}^{aa}_{xy_x})\right].$$

La réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire sera donnée par la relation:

$$\sum C\,{}_tV^1_{x\,y_x} = \breve{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|}\sum P - {}_{x'-\sigma}\overline{S}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x}\sum C - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\sum \overline{K}^{aa(w)}. \tag{194}$$

VII. Assurances de capitaux de survie payables aux veuves des invalides

Dans ce cas, le problème précédent reste le même, à la différence que, cette fois, le capital est payable à la veuve non en cas de décès du mari à l'état d'actif, mais en cas de décès du mari à l'état d'invalide avant l'âge-terme. La réserve individuelle par la formule rétrospective s'écrit alors:

$${}_tV^1_{x,y} = P\,\breve{s}^{aa}_{xy:\overline{t}|} - C\,{}_{|t}\overline{S}^{ai}_{xy}, \tag{195}$$

où nous avons posé:

$${}_{|t}\overline{S}^{ai}_{xy} = \frac{\overline{M}^{ai}_{xy} - \overline{M}^{ai}_{x'y'}}{D^{aa}_{x'y'}}.$$

Nous introduisons l'âge moyen des femmes et le couple initial σ et $\sigma - \Delta_x$ comme dans les cas précédents. Nous obtenons:

$$C\,{}_iV^1_{x\,y_x} = P\,\bar{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}} - C\,{}_{x'-\sigma}\bar{S}^{ai}_{1\,\sigma:\sigma-\Delta_x} - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\,\bar{K}^{ai(w)} \qquad (196)$$

avec le coefficient de la méthode U:

$$\bar{K}^{ai(w)} = \left[P(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{xy_x}) - C\left(\bar{M}^{ai}_{1\,\sigma:\sigma-\Delta_x} - \bar{M}^{ai}_{1\,xy_x}\right)\right].$$

La réserve mathématique totale d'un groupe de polices au moyen de la méthode U s'écrira:

$$\sum C\,{}_iV^1_{x\,y_x} = \bar{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}} \sum P - {}_{x'-\sigma}\bar{S}^{ai}_{1\,\sigma:\sigma-\Delta_x} \sum C - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}} \sum \bar{K}^{ai(w)}.$$

VIII. Considérations générales sur l'emploi de la méthode U

Les formules que nous avons obtenues pour les assurances en cas d'invalidité ne sont pas compliquées; elles conviennent bien à l'application pratique. Toutefois, elles nécessitent l'établissement préalable des facteurs de capitalisation d'activité et d'invalidité en fonction de l'âge à l'inventaire. Dans les tables employées habituellement, on dispose des valeurs actuelles des assurances en cas d'invalidité. En vue de l'application facile de la méthode U, il est avantageux d'établir des tabelles pour les nouveaux éléments. Cela ne représente pas un travail supplémentaire très important.

Dans les assurances de veuves, l'application de la nouvelle méthode est également générale. Les formules obtenues sont du même genre que celles des assurances d'invalidité. L'utilisation de l'âge moyen y_x des femmes est indispensable en vue de l'application de notre méthode. Cependant, les résultats obtenus peuvent être considérés comme tout à fait satisfaisants.

Pour ces deux groupes d'assurances, le calcul par groupes des réserves au moyen de la nouvelle méthode, méthode U, peut rendre de bons services. Ainsi, le caractère de généralité de la méthode U se trouve confirmé une fois de plus.

Chapitre II

Application de la méthode $U^{(w)}$ aux assurances d'invalidité et de survivants

La méthode $U^{(w)}$ ou la méthode dérivée de celle de Whiting, rappelons-le, est la méthode U dont le coefficient s'exprime en fonction de l'âge-terme et d'autres quantités, telles que des primes. Comme la méthode U est générale, la méthode $U^{(w)}$ l'est aussi. Nous nous bornerons ici à l'examen de quelques formes d'assurances d'invalidité et de survivants. Pour distinguer entre les différentes primes, nous utiliserons la lettre P avec les indices spécifiques de chaque assurance.

I. Assurances temporaires de capitaux payables en cas de décès à l'état d'actif

Partons du coefficient de la méthode U, formule (165):

$$\overline{K}^{aa} = \left[P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,x:\overline{s-x}|}(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{x}) - C(\overline{M}^{aa}_{\sigma} - \overline{M}^{aa}_{x})\right],$$

où $P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,x:\overline{s-x}}$ désigne la prime annuelle de l'assurance payable pendant n années. Cherchons à remplacer les nombres de commutation à l'âge x par ceux de l'âge $x+n=s$. Or, la prime s'écrit:

$$P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,x:\overline{s-x}} = C\,\frac{\overline{M}^{aa}_{x} - \overline{M}^{aa}_{s}}{N^{aa}_{x} - N^{aa}_{s}};$$

d'où:

$$-P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,x:\overline{s-x}}\,N^{aa}_{x} + C\,\overline{M}^{aa}_{x} = -P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,x:\overline{s-x}|}\,N^{aa}_{s} + C\,\overline{M}^{aa}_{s}.$$

Le coefficient de départ peut se mettre donc sous la forme:

$$\overline{K}^{aa} = \left[P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,x:\overline{s-x}|}(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{s}) - C(\overline{M}^{aa}_{\sigma} - \overline{M}^{aa}_{s})\right],$$

ou bien encore:

$$\overline{K}^{aa} = \left(P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,x:\overline{s-x}|} - P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,\sigma:\overline{s-\sigma}|}\right)(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{s}),$$

c'est le coefficient de la méthode $U^{(w)}$ que nous substituons à celui de la méthode U pour avoir la formule de la méthode $U^{(w)}$:

$${}_{t}V_{x} = P\,\bar{s}^{aa}_{\overline{\sigma}:\overline{x'-\sigma}} - C\,{}_{x'-\sigma}\overline{S}^{aa}_{\sigma} - \frac{1}{D^{aa}_{x'}}\left(P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,x:\overline{s-x}|} - P^{aa}_{1\,\underline{\quad}\,\sigma:\overline{s-\sigma}|}\right)(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{s}). \quad (198)$$

Pour un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire, la réserve mathématique totale s'obtient par la relation:

$$\sum C_t V_x = \bar{s}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} \sum P - {}_{|x'-\sigma}\overline{S}^{aa}_{\sigma} \sum C - \frac{1}{D^{aa}_{x'}} \sum \overline{K}^{aa}. \qquad (199)$$

Lorsqu'on emploie une table de nombres de commutation spéciale commençant par l'âge σ, telle que nous l'avons proposée pour les calculs rétrospectifs, on a $N^{aa}_{\sigma} = 0$ et le coefficient de la méthode $U^{(w)}$ se réduit à:

$$\overline{K}^{aa} = -N^{aa}_{s}\left(P^{aa}_{1\,\overline{x:\overline{s-x}|}} - P^{aa}_{1\,\overline{\sigma:\overline{s-\sigma}|}}\right).$$

Le calcul de la prime $P^{aa}_{1\,\overline{\sigma:\overline{s-\sigma}|}}$ s'effectue très rapidement.

Si le capital C croît en progression arithmétique avec les années de service, on établit la formule de la méthode $U^{(w)}$ comme dans le cas précédent sans difficulté.

II. Assurances temporaires de capitaux payables en cas d'invalidité

Exprimons le coefficient de la méthode U, formule (171):

$$\overline{K}^{ai} = \left[P^{ai}_{1\,\overline{x:\overline{s-x}|}}\left(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{x}\right) - C\left([\overline{M}^{ai}_{\sigma}] - [\overline{M}^{ai}_{x}]\right)\right]$$

à l'aide de la formule de la prime:

$$P^{ai}_{1\,\overline{x:\overline{s-x}|}} = \frac{[\overline{M}^{ai}_{x}] - [\overline{M}^{ai}_{s}]}{N^{aa}_{x} - N^{aa}_{s}}$$

en fonction des nombres de commutation à l'âge-terme s:

$$\overline{K}^{ai} = \left[P^{ai}_{1\,\overline{x:\overline{s-x}|}}\left(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{s}\right) - C\left([\overline{M}^{ai}_{\sigma}] - [\overline{M}^{ai}_{s}]\right)\right],$$

$$\overline{K}^{ai} = \left(P^{ai}_{1\,\overline{x:\overline{s-x}|}} - P^{ai}_{1\,\overline{\sigma:\overline{s-\sigma}|}}\right)\left(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{s}\right).$$

Cette dernière expression est le coefficient de la méthode $U^{(w)}$. La réserve mathématique individuelle selon la méthode $U^{(w)}$ sera par conséquent:

$$C_t V_x = P\,\bar{s}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} - C\left[{}_{|x'-\sigma}\overline{S}^{ai}_{\sigma}\right] - \frac{1}{D^{aa}_{x'}}\left(P^{ai}_{1\,\overline{x:\overline{s-x}|}} - P^{ai}_{1\,\overline{\sigma:\overline{s-\sigma}|}}\right)\left(N^{aa}_{\sigma} - N^{aa}_{s}\right). \qquad (200)$$

La réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire s'écrira finalement:

$$\sum C_t V_x = \bar{s}^{aa}_{\sigma:\overline{x'-\sigma}|} \sum P - \left[{}_{|x'-\sigma}\overline{S}^{ai}_{\sigma}\right] \sum C - \frac{1}{D^{aa}_{x'}} \sum \overline{K}^{aa}. \qquad (201)$$

III. Assurances de capitaux de survie payables aux veuves des actifs

Transformons le coefficient de la méthode U, la formule (193):

$$\overline{K}^{aa(w)} = \left[P^{aa}_{1\ xy_x:\overline{s-x}|}(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{xy_x}) - C(\overline{M}^{aa}_{1\ \sigma:\sigma-\Delta_x} - \overline{M}^{aa}_{1\ xy_x})\right]$$

au moyen de la formule de la prime:

$$P^{aa}_{1\ xy_x:\overline{s-x}|} = \frac{\overline{M}^{aa}_{1\ xy_x} - \overline{M}^{aa}_{1\ s:s-\Delta_x}}{N^{aa}_{xy_x} - N^{aa}_{s:s-\Delta_x}}$$

en un autre coefficient comprenant les nombres de commutation à l'âge-terme s:

$$\overline{K}^{aa(w)} = \left[P^{aa}_{1\ xy_x:\overline{s-x}|}(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{s:s-\Delta_x}) - C(\overline{M}^{aa}_{1\ \sigma:\sigma-\Delta_x} - \overline{M}^{aa}_{1\ s:s-\Delta_x})\right],$$

$$\overline{K}^{aa(w)} = \left(P^{aa}_{1\ xy_x:\overline{s-x}|} - P^{aa}_{1\ \sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{s-\sigma}|}\right)(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{s:s-\Delta_x}).$$

Ce coefficient de la méthode $U^{(w)}$ nous permet d'écrire la réserve mathématique individuelle selon la méthode $U^{(w)}$:

$${}_tV^{1}_{x\ y_x} = P\,\breve{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|} - {}_{|x'-\sigma}\overline{S}^{aa}_{1\ \sigma:\sigma-\Delta_x} - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\overline{K}^{aa(w)}, \qquad (202)$$

et puis, la réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire:

$$\sum {}_tV^{1}_{x|y_x} = \breve{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|}\sum P - {}_{|x'-\sigma}\overline{S}^{aa}_{1\ \sigma:\sigma-\Delta_x}\sum C - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\sum \overline{K}^{aa(w)}. \qquad (203)$$

IV. Assurances de capitaux de survie payables aux veuves des invalides

Le coefficient de la méthode $U^{(w)}$ s'obtient en transformant le coefficient de la méthode U, formule (196):

$$\overline{K}^{ai(w)} = \left[P^{ai}_{xy_x:\overline{s-x}|}(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{xy_x}) - C(\overline{M}^{ai}_{1\ \sigma:\sigma-\Delta_x} - \overline{M}^{ai}_{1\ xy_x})\right],$$

comme d'habitude, en un nouveau coefficient fonction des nombres de

commutation à l'âge-terme s et d'autres quantités. Or, la prime s'écrit:

$$P^{ai}_{1\,xy_x:\overline{s-x}|} = \frac{\overline{M}^{ai}_{1\,xy_x} - \overline{M}^{ai}_{1\,s:s-\Delta_x}}{N^{aa}_{xy_x} - N^{aa}_{s:s-\Delta_x}};$$

d'où:

$$-P^{ai}_{1\,xy_x:\overline{s-x}|} N^{aa}_{xy_x} + C\overline{M}^{ai}_{1\,xy_x} = -P^{ai}_{1\,xy_x:\overline{s-x}|} N^{aa}_{s:s-\Delta_x} + C\overline{M}^{ai}_{1\,s:s-\Delta_x}.$$

Le coefficient devient alors:

$$\overline{K}^{ai(w)} = \left[P^{ai}_{1\,xy_x:\overline{s-x}|}(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{s:s-\Delta_x}) - C(\overline{M}^{ai}_{1\,\sigma:\sigma-\Delta_x} - \overline{M}^{ai}_{1\,s:s-\Delta_x})\right],$$

$$\overline{K}^{ai(w)} = \left(P^{ai}_{1\,xy_x:\overline{s-x}|} - P^{ai}_{1\,\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{s-\sigma}|}\right)(N^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x} - N^{aa}_{s:s-\Delta_x}).$$

C'est le coefficient de la méthode $U^{(w)}$. La réserve mathématique individuelle s'écrit:

$${}_tV^1_{x|y_x} = P\,\breve{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|} - C_{|x'-\sigma}\overline{S}^{ai}_{1\,\sigma:\sigma-\Delta_x} - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\overline{K}^{ai(w)}. \qquad (204)$$

La réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés de même âge x' à l'inventaire aura pour expression:

$$\sum {}_tV^1_{x\,y_x} = \breve{s}^{aa}_{\sigma:\sigma-\Delta_x:\overline{x'-\sigma}|}\sum P - {}_{|x'-\sigma}\overline{S}^{ai}_{1\,\sigma:\sigma-\Delta_x}\sum C - \frac{1}{D^{aa}_{x'y'_x}}\sum \overline{K}^{ai(w)}. \qquad (205)$$

V. Considérations générales sur l'emploi de la méthode $U^{(w)}$

Tout ce que nous avons fait remarquer au sujet de l'emploi de la méthode U est également valable pour la méthode $U^{(w)}$. Celle-ci est une méthode très générale. Le calcul des coefficients s'effectue aisément par le moyen des tableaux établis pour les primes annuelles et pour les autres quantités.

Dans les assurances de veuves, étant donné qu'il y a deux têtes, il faut calculer les facteurs de capitalisation et les coefficients sur les âges moyens des femmes. Les résultats sont donc approximatifs; l'approximation peut être considérée comme très bonne.

Chapitre III

Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone aux assurances d'invalidité et de survivants

Parallèlement à ce qui se fait dans la méthode de Lidstone, nous avons cherché plus haut, dans le dessein d'obtenir la méthode dérivée, le développement limité des valeurs finales de la rente et du risque. Pour appliquer notre nouvelle méthode aux assurances d'invalidité et de survivants, il nous faudra étudier le développement lidstonien des valeurs finales de la rente temporaire d'activité, de la rente d'invalidité et du risque en cas de décès à l'état d'actif ou d'invalide. Nous pourrons alors grouper pour l'inventaire les contrats souscrits la même année, qui ont donc le même nombre d'années courues t, puis calculer leur âge moyen d'entrée. Autrement dit, nous aurons l'application de la méthode «t» aux assurances d'invalidité et de survivants, selon notre façon de traiter le problème.

Dans les calculs qui vont suivre pour la recherche des développements limités des éléments rétrospectifs, nous utiliserons: d'une part, la loi de Makeham pour exprimer analytiquement le taux instantané de mortalité et, d'autre part, la loi de Behm-Urech pour l'expression analytique de la probabilité annuelle d'invalidité. Cette dernière loi a été employée dans la construction de la table du Bureau Fédéral des Assurances pour l'assurance de groupes, en 1931. Nous l'adopterons telle qu'elle y a été définie.

Il va de soi que la méthode dérivée sera une méthode d'approximation, les éléments rétrospectifs étant obtenus au moyen de développements limités.

I. Assurances temporaires de capitaux payables en cas de décès à l'état d'actif

1° Les développements limités de quelques éléments rétrospectifs

a) Développement de la valeur finale de la rente temporaire d'activité:

La valeur finale de la rente temporaire d'activité peut s'écrire sous la forme d'une somme de facteurs de capitalisation d'activité:

$$\bar{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \frac{D^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x+t}} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \frac{1}{v^{t-\tau}\,{}_{t-\tau}p^{aa}_{x+\tau}} \quad \text{où:} \quad {}_{t-\tau}p^{aa}_{x+\tau} = \frac{l^{aa}_{x+t}}{l^{aa}_{x+\tau}}. \quad (206)$$

Le nombre d'actifs $l^{aa}_{x+\tau}$ s'obtient en intégrant l'équation différentielle:

$$\frac{dl^{aa}_{x+\tau}}{l^{aa}_{x+\tau}} = d\,\mathrm{Log}\, l^{aa}_{x+\tau} = -(\mu^{aa}_{x+\tau} + \nu_{x+\tau})\, d\tau, \tag{207}$$

et puis

$$l^{aa}_{x+\tau} = l^{aa}_{x}\, e^{-\int_{\tau=0}^{\tau} (\mu^{aa}_{x+\tau} + \nu_{x+\tau})\, d\tau}. \tag{208}$$

Dans cette équation $\mu^{aa}_{x+\tau}$ est le taux instantané de mortalité des actifs et $\nu_{x+\tau}$ le taux instantané d'invalidité. Supposant que la mortalité est indépendante de l'invalidité, le taux instantané $\mu^{aa}_{x+\tau}$ peut s'exprimer au moyen de la loi de Makeham:

$$\mu^{aa}_{x+\tau} = a + bc^{x+\tau} = -\mathrm{Log}\, s - \mathrm{Log}\, g\, \mathrm{Log}\, c\, c^{x+\tau}, \tag{209}$$

où s, g et c sont les constantes de Makeham.

D'autre part, si, comme nous l'admettons, la probabilité annuelle corrigée d'invalidité $i^{(c)}_{x+\tau}$ suit la loi de Behm-Urech, $i^{(c)}_{x+\tau} = FG^{x+\tau}$, où F et G sont des constantes, le taux instantané d'invalidité s'obtient selon l'équation intégrale:

$$1 - FG^{x+\tau} = e^{-\int_{x}^{x+1} \nu_{x+\tau}\, d\tau}. \tag{210}$$

D'après les calculs effectués par M. Haldy [1]) pour neuf tables d'invalidité, la constante F est comprise entre 0,000 007 et 0,000 36, et la constante G entre 1,114 et 1,161.

La résolution de l'équation intégrale (210) est malaisée et son emploi conduirait à des sérieuses complications dans les applications pratiques. M. Dasen (voir la bibliographie à la fin) a montré que si l'on prend comme solution approximative de cette équation $\bar{\nu}_{x+\tau} = FG^{x+\tau}$, l'erreur commise est négligeable, du moins pour les âges inférieurs à 60.

De la formule (210), on tirerait en effet le taux annuel correspondant:

$$\bar{i}^{(c)}_{x+\tau} = 1 - g^{TG^{x+\tau}(G-1)}, \tag{211}$$

où:

$$T = \frac{-F}{\mathrm{Log}\, G\, \mathrm{Log}\, g},$$

g étant la constante de Makeham. En comparant $i^{(c)}_{x+\tau} = FG^{x+\tau}$ et $\bar{i}^{(c)}_{x+\tau}$, M. Dasen montre précisément que jusqu'à 60 ans la différence est peu importante.

[1]) Voir «Influence des variations de l'invalidité sur les réserves mathématiques», thèse 1932, Lausanne.

Après ces remarques concernant les taux instantanés de mortalité et d'invalidité, nous pouvons aisément intégrer l'équation différentielle de départ pour obtenir la fonction $l^{aa}_{x+\tau}$ et nous trouvons la relation suivante:

$$l^{aa}_{x+\tau} = k s^{x+\tau} g^{c^{x+\tau} + TG^{x+\tau}}. \tag{212}$$

Dans cette formule, on connaît, outre les constantes T et G, les constantes de Makeham s, g et c.

La probabilité d'un actif d'âge $x+\tau$ d'être en vie, à l'état d'actif à l'âge $x+t$, c'est-à-dire après $t-\tau$ années, a pour expression:

$${}_{t-\tau}p^{aa}_{x+\tau} = s^{t-\tau} g^{c^x(c^t-c^\tau) + TG^x(G^t-G^\tau)}. \tag{213}$$

La valeur finale de la rente temporaire d'activité, formule (206), peut donc se mettre sous la forme:

$$\ddot{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)} e^{-\mathrm{Log}\, g\,[c^x(c^t-c^\tau) + TG^x(G^t-G^\tau)]}, \tag{214}$$

ou bien:

$$\ddot{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{p=0}^{p=\infty} (vs)^{-(t-\tau)} \frac{[c^x(c^\tau-c^t) + TG^x(G^\tau-G^t)]^p}{p!} \mathrm{Log}^p g. \tag{215}$$

De là, nous tirons la valeur approchée suivante:

$$\ddot{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)} \left[1 + \left\{c^x(c^\tau-c^t) + TG(G^\tau-G^t)\right\} \mathrm{Log}\, g\right]. \tag{216}$$

Si nous posons:

$$\lambda_0(t) = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}$$

$$\lambda_1(t) = \mathrm{Log}\, g \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)} (c^\tau - c^t)$$

$$\lambda_2(t) = T\,\mathrm{Log}\, g \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)} (G^\tau - G^t).$$

Nous arrivons au développement limité:

$$\ddot{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^x + \lambda_2(t)\, G^x. \tag{217}$$

Les trois coefficients $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ ne dépendent que de t et des constantes de Makeham et de la loi de Behm-Urech; ils sont, en revanche, indépendants de l'âge x. Les deux premiers termes de $\ddot{s}^{aa}_{x:\overline{t}|}$

sont ceux du développement lidstonien de la valeur finale de la rente $\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$; le troisième, $\lambda_2(t)G^x$, est nouveau et vient de la table d'invalidité. L'expression obtenue pour $\ddot{s}^{aa}_{x:\overline{t}|}$ sera dite: développement lidstonien de la valeur finale de la rente d'actif. Cette expression ne donne qu'une valeur approximative, en général du reste satisfaisante; elle n'est cependant pas mathématiquement exacte.

b) Développement de la valeur finale du risque de décès à l'état d'actif:

La valeur finale, au moment t, du risque que l'assureur court pour le cas de décès à l'état d'actif durant les t premières années d'assurance peut s'exprimer de la manière suivante:

$$|_t\overline{S}^{aa}_x = v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \frac{D^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x+t}} q^{aa}_{x+\tau} = v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)} g^{-c^x(c^t-c^\tau)-TG^x(G^t-G^\tau)} q^{aa}_{x+\tau} \quad (218)$$

avec

$$q^{aa}_{x+\tau} = 1-p^{aa}_{x+\tau}-i^{(e)}_{x+\tau} = 1-sg^{c^{x+\tau}(c-1)+TG^{x+\tau}(G-1)} - FG^{x+\tau} + \frac{F}{2} G^{x+\tau}(1-sg^{c^{x+\tau}(c-1)})$$

ou

$$q^{aa}_{x+\tau} = 1-sg^{c^{x+\tau}(c-1)+TG^{x+\tau}(G-1)} - \frac{F}{2} G^{x+\tau} - \frac{F}{2} sG^{x+\tau} g^{c^{x+\tau}(c-1)}. \quad (219)$$

La valeur finale du risque peut donc s'écrire en fonction de la probabilité annuelle de survie à l'état d'actif et de la probabilité annuelle d'invalidité. En développant les exponentielles en séries, nous obtenons, si $f = \dfrac{\operatorname{Log} G}{\operatorname{Log} g}$:

$$|_t\overline{S}^{aa}_x = v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{p=0}^{p=\infty} (vs)^{-(t-\tau)} \frac{[c^x(c^\tau-c^t)+TG^x(G^\tau-G^t)]^p}{p!} \operatorname{Log}^p g \quad (220)$$

$$- v^{\frac{1}{2}} s \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{p=0}^{p=\infty} (vs)^{-(t-\tau)} \frac{[c^x(c^{\tau+1}-c^t)+TG^x(G^{\tau+1}-G^t)]^p}{p!} \operatorname{Log}^p g$$

$$- \frac{F}{2} v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{p=0}^{p=\infty} (vs)^{-(t-\tau)} \frac{[c^x(c^\tau-c^t)+TG^x(G^\tau-G^t)+f(x+\tau)]^p}{p!} \operatorname{Log}^p g$$

$$- \frac{F}{2} sv^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{p=0}^{p=\infty} (vs)^{-(t-\tau)} \frac{[c^x(c^{\tau+1}-c^t)+TG^x(G^\tau-G^t)+f(x+\tau)]^p}{p!} \operatorname{Log}^p g.$$

Retenons dans ces développements les deux premiers termes seulement, pour lesquels $p = 0$ et $p = 1$; en négligeant les autres, nous arrivons au développement limité:

$$|_t\overline{S}^{aa}_x = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^x + \lambda_2(t)\, G^x + \lambda_3(t)\, x, \qquad (221)$$

où nous avons posé:

$$(t) = v^{\frac{1}{2}}\left(1 - s - \frac{F}{2} - \frac{F}{2}s\right) \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)} - v^{\frac{1}{2}}\frac{F}{2}(1+s)\,\mathrm{Log}\,G \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \tau (vs)^{-(t-\tau)}$$

$$(t) = -v^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{F}{2}\right) s\,\mathrm{Log}\,g \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}\,(c^{\tau+1} - c^t) + v^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{F}{2}\right)\mathrm{Log}\,g \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}\,(c^\tau - c^t)$$

$$(t) = -v^{\frac{1}{2}}\left(\frac{F}{2} + \frac{Fs}{2} - 1\right) T\,\mathrm{Log}\,g \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}\,(G^\tau - G^t) - v^{\frac{1}{2}} T s\,\mathrm{Log}\,g \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}\,(G^{\tau+1} - G^t)$$

$$(t) = -v^{\frac{1}{2}}(1+s)\frac{F}{2}\,\mathrm{Log}\,G \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (vs)^{-(t-\tau)}.$$

C'est un développement lidstonien dont les coefficients sont indépendants de x; cependant, ils sont compliqués et longs à calculer. La valeur finale du risque est donc approximative.

Il resterait à étudier le degré d'approximation ainsi obtenu. On pourrait le faire au moyen d'exemples numériques, comme M. Dasen l'a fait dans sa thèse sur la méthode de Lidstone. Nous admettrons ici que l'approximation est suffisante.

Ci-après, lorsque nous chercherons à appliquer la méthode dérivée de celle de Lidstone aux assurances de capitaux en cas de décès à l'état d'actif, nous examinerons si les développements (217) et (221) permettent l'utilisation du principe de Lidstone.

c) Développement de la valeur finale du risque de décès à l'état d'actif lorsque le capital assuré augmente en progression arithmétique avec les années:

Nous avons:

$$|_t(I\overline{S})^{aa}_x = v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} (1+\tau)\frac{D^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x+t}}\, q^{aa}_{x+\tau}. \qquad (222)$$

Cette expression sans facteur de croissance $(1+\tau)$ est celle du cas précédent, formule (218). Son développement en série s'obtient exactement

de la même manière. Or, il suffit de multiplier toutes les quantités sous les signes $\sum$ dans la formule (220) par $(1+\tau)$ pour avoir le développement en série et puis, le développement limité:

$$|_t(I\bar{S})_x^{aa} = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^x + \lambda_2(t)\, G^x + \lambda_3(t)\, x, \qquad (223)$$

dans lequel les coefficients s'obtiennent de ceux du développement limité (221) en multipliant les quantités sous les signes $\sum$ par $(1+\tau)$.

Après avoir trouvé les développements lidstoniens des éléments rétrospectifs, nous passons à l'application de la méthode dérivée de celle de Lidstone.

2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone

a) Capitaux constants:

La réserve mathématique individuelle de l'assurance temporaire d'un capital en cas de décès à l'état d'actif est donnée par la formule:

$$C\,{}_tV_x = P\bar{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} - C\,|_t\bar{S}^{aa}_x.$$

Considérons un groupe d'assurances temporaires de capital en cas de décès à l'état d'actif, dont la durée courue, t, soit la même; l'âge d'entrée, x, en revanche, peut différer. Dans la deuxième partie de ce travail, lorsque nous avons étudié la méthode de groupement dérivée de celle de Lidstone pour les assurances sur la vie, nous avons remplacé les divers âges d'entrée x par un âge moyen η calculé en fonction des primes par la formule:

$$c^{\eta} = \frac{\sum P c^x}{\sum P},$$

ou par un âge moyen ξ fonction des capitaux assurés, donné par:

$$c^{\xi} = \frac{\sum C c^x}{\sum C}.$$

Nous chercherons à procéder de manière analogue en utilisant les développements lidstoniens (217) pour $\bar{s}^{aa}_{x:\overline{t}|}$ et (221) pour $|_t\bar{S}^{aa}_x$, c'est-à-dire que nous allons substituer, si possible, aux différents âges d'entrée des actifs, un âge moyen. Désignons par η l'âge moyen cherché relatif aux primes et par ξ l'âge moyen relatif aux capitaux.

Les développements lidstoniens en question conduisent aux équations:

$$[\lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^{\eta} + \lambda_2(t)\, G^{\eta}] \sum P = \sum P [\lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^{x} + \lambda_2(t)\, G^{x}], \qquad (224)$$

$$[\lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^{\xi} + \lambda_2(t)\, G^{\xi} + \lambda_3(t)\, \xi] \sum C = \sum C [\lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^{x} + \lambda_2(t)\, G^{x} + \lambda_3(t)\, x]. \qquad (225)$$

La première de ces équations ne peut pas être satisfaite. Si elle l'était, on aurait:

$$c^{\eta} = \frac{\sum P c^{x}}{\sum P}, \quad \text{et} \quad G^{\eta} = \frac{\sum P G^{x}}{\sum P}.$$

Or, $G > c$ d'après les calculs de Blaschke et Haldy, et Galbrun a démontré que les deux relations ci-dessus ne peuvent alors pas être simultanément satisfaites. Il n'existe donc pas d'âge moyen η tel que:

$$\bar{s}^{aa}_{\eta:\overline{t}|} \sum P = \sum \bar{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} P.$$

Cela suffit à montrer que, au point de vue purement mathématique, le principe de Lidstone n'est pas applicable aux assurances d'invalidité et de survivants.

De même, la seconde équation ne peut pas être satisfaite par une valeur ξ égale à un âge moyen.

Néanmoins, nous pouvons essayer de chercher des solutions approximatives pour les âges η et ξ, qui conduisent à des valeurs finales approchées pour le groupe considéré.

Nous considérons d'une part les âges moyens η_1 et η_2 résultant des équations:

$$\left.\begin{aligned} c^{\eta_1} &= \frac{\sum P c^{x}}{\sum P} \\ G^{\eta_2} &= \frac{\sum P G^{x}}{\sum P} \end{aligned}\right\} \qquad (226)$$

et, d'autre part, les âges moyens ξ_1, ξ_2 et ξ_3 obtenus des équations:

$$\left.\begin{aligned} c^{\xi_1} &= \frac{\sum C c^{x}}{\sum C} \\ G^{\xi_2} &= \frac{\sum C G^{x}}{\sum C} \\ \xi_3 &= \frac{\sum C x}{\sum C} \end{aligned}\right\} \qquad (227)$$

De cette manière, nous aurons deux âges moyens fondés sur les primes et trois, sur les capitaux, ce qui est assez compliqué. Nous pensons que le mieux est de prendre un âge moyen sur les primes et un autre sur les capitaux pour calculer les valeurs finales de la rente temporaire d'activité et du risque de décès à l'état d'actif. Cependant, cela exige encore un travail considérable et peu fructueux. Le calcul d'un seul âge moyen sur les primes ou sur les capitaux pourrait sans doute fournir une approximation suffisante. On ne peut guère estimer le degré d'approximation sans effectuer préalablement des calculs numériques.

La formule de la méthode dérivée de celle de Lidstone peut s'écrire, sur la base des deux âges moyens:

$$\sum {}_tV_x = \bar{s}^{aa}_{\eta:\overline{t}|} \sum P - {}_t\bar{S}^{aa}_{\xi} \sum C. \tag{228}$$

b) Capitaux croissants:

Au cas où le capital payable en cas de décès à l'état d'actif, croît avec les années de service, la réserve mathématique individuelle d'un assuré actif s'exprime comme suit:

$$C\,{}_tV_x = P\bar{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} - C\,{}_{|t}(I\bar{S})^{aa}_{x}.$$

Connaissant les développements lidstoniens, formules (217) et (223), des deux valeurs finales, il nous est aisé de déterminer, comme dans le cas précédent, deux âges moyens sur les primes et trois, sur les capitaux. Nous pouvons choisir un âge moyen dans chaque groupe et écrire la réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés actifs:

$$\sum C\,{}_tV_x = \bar{s}^{aa}_{\eta:\overline{t}|} \sum P - {}_{|t}(I\bar{S})^{aa}_{\xi} \sum C. \tag{229}$$

L'emploi d'un seul âge moyen peut être également envisagé.

II. Assurances temporaires de capitaux payables en cas d'invalidité

1° Les développements limités de quelques éléments rétrospectifs

a) Développement de la valeur finale du risque d'invalidité:

L'assureur s'engage à payer à l'assuré un capital C en cas d'invalidité survenant avant l'âge-terme s. La valeur finale du risque, au moment t, peut s'écrire:

$$[{}_t\bar{S}^{ai}_{x}] = v^t \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \frac{D^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x-t}} i^{(s)}_{x+\tau}. \tag{230}$$

Or:

$$i^{(e)}_{x+\tau} = i^{(c)}_{x+\tau}\left(1-\frac{q_{x+\tau}}{2}\right).$$

Il vient donc:

$$[{}_t\bar{S}^{ai}_x] = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{2}\sum_{\tau=0}^{\tau=t-1}\left(\frac{D^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x+t}}\,i^{(c)}_{x+\tau}+\frac{D^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x+t}}\,p_{x+\tau}\,i^{(c)}_{x+\tau}\right). \qquad (231)$$

Au moyen de l'expression analytique des termes sous le signe $\sum$, nous transformons cette dernière formule de la manière suivante:

$$[{}_t\bar{S}^{ai}_x] = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{2}F\sum_{\tau=0}^{\tau=t-1}\sum_{p=0}^{p=\infty}(vs_1)^{-(t-\tau)}\,\frac{[c_1^x(c_1^\tau-c_1^t)+TG^x(G^\tau-G^t)+f(x+\tau)]^p}{p!}\,\mathrm{Log}^p g_1$$

$$+\frac{v^{\frac{1}{2}}}{2}Fs_2\sum_{\tau=0}^{\tau=t-1}\sum_{p=0}^{p=\infty}(vs_1)^{-(t-\tau)}\,\frac{[c_1^x(c_1^\tau-c_1^t)+TG^x(G^\tau-G^t)+f(x+\tau)]^p}{p!}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\tau=0}^{\tau=t-1}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{[c_2^x(c_2^{\tau+1}-c_2^\tau)]^p}{p!}\,\mathrm{Log}^p g_1\,\mathrm{Log}^p g_2 \qquad (232)$$

où s_1, c_1 et g_1 sont les constantes de Makeham relatives au taux instantané de mortalité $\mu^{aa}_{x+\tau}$, et s_2, c_2 et g_2 celles qui concernent le taux instantané de mortalité $\mu_{x+\tau}$. Le développement en série de cette dernière relation nous conduit à de très longs calculs. Cependant, nous pouvons dire que le développement cherché sera de la forme:

$$[{}_t\bar{S}^{ai}_x] = \lambda_0(t)+\lambda_1(t)\,c^x+\lambda_2(t)\,G^x+\lambda_3(t)\,x. \qquad (233)$$

Ce nouveau développement lidstonien nous servira de base pour chercher l'âge moyen d'entrée sur les capitaux d'un groupe d'assurés. Le calcul de ses coefficients représente un travail relativement très long.

b) Développement de la valeur finale du risque d'invalidité lorsque le capital assuré augmente en progression arithmétique avec les années:

Si le capital payable en cas d'invalidité augmente parallèlement au nombre des années de service, la valeur finale du risque, au moment t, se calcule par la relation:

$$[{}_t(I\bar{S})^{ai}_x] = v^{\frac{1}{2}}\sum_{\tau=0}^{\tau=t-1}(1+\tau)\,\frac{D^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x+t}}\,i^{(e)}_{x+\tau}. \qquad (234)$$

On cherche le développement lidstonien en série de cette expression comme celui de l'expression (230) relative au capital constant. Pour

cela, il faut multiplier par le facteur $(1+\tau)$ toutes les quantités sous les signes $\sum$ de cette expression (230). On aura le développement lidstonien suivant:

$$[{}_{|t}(I\bar{S})_x^{ai}] = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^x + \lambda_2(t)\, G^x + \lambda_3(t)\, x, \qquad (235)$$

où les coefficients sont ceux du développement (233), dans lesquels on multiplie par $(1+\tau)$ toutes les quantités sous les signes $\sum$.

2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone

a) Capitaux constants:

La réserve mathématique de l'assurance temporaire d'un capital payable en cas d'invalidité étant:

$$C\,{}_tV_x = P\,\ddot{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} - C[{}_{|t}\bar{S}_x^{ai}],$$

nous calculons les âges moyens selon les équations:

$$\ddot{s}^{aa}_{\eta:\overline{t}|} \sum P = \sum P\,\ddot{s}^{aa}_{x:\overline{t}|}$$

et

$$[{}_{|t}\bar{S}_\xi^{ai}] \sum C = \sum C\,[{}_{|t}\bar{S}_x^{ai}].$$

Les développements lidstoniens, formules (217) et (233), nous permettent de trouver deux âges moyens sur les primes annuelles et trois, sur les capitaux. Si l'on prend un âge moyen sur les primes annuelles et un autre sur les capitaux, la formule de la réserve mathématique totale sera pour un groupe d'assurés:

$$\sum C\,{}_tV_x = \ddot{s}^{aa}_{\eta:\overline{t}|} \sum P - [{}_{|t}\bar{S}_\xi^{ai}] \sum C. \qquad (236)$$

b) Capitaux croissants:

A l'aide du développement lidstonien, formule (235), le calcul des âges moyens se fait de la même façon que dans le dernier cas et nous obtenons finalement la formule de la réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés:

$$\sum C\,{}_tV_x = \ddot{s}^{aa}_{\eta:\overline{t}|} \sum P - [{}_{|t}(I\bar{S})_\xi^{ai}] \sum C. \qquad (237)$$

Toute remarque faite dans le cas des capitaux constants au sujet des âges moyens est ici également valable.

III. Rentes viagères d'invalidité assurée temporairement

1° Le développement de la valeur finale de la rente temporaire assurée temporairement

La valeur finale des prestations nées jusqu'au moment t, pour cette catégorie de rentes, est égale à:

$$\ddot{s}_x^{ai(x')} = v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \frac{D_{x+\tau}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}} i_{x+\tau}^{(e)} \ddot{a}_{x+\tau+\frac{1}{2}}. \tag{238}$$

Nous pouvons l'écrire sous une autre forme:

$$\ddot{s}_x^{ai(x')} = v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{z=0}^{\omega-\tau-\frac{1}{2}} \frac{D_{x+\tau}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}} i_{x+\tau}^{(c)} (1+p_{x+\tau})\, v^z\, {}_zp_{x+\tau+\frac{1}{2}}, \tag{239}$$

ou bien:

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_x^{ai(x')} = {} & \frac{v^{\frac{1}{2}}}{2} F \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{p=0}^{p=\infty} (v s_1)^{-(t-\tau)} \frac{[c_1^x(c_1^\tau - c_1^t) + TG^x(G^\tau - G^t) + f(x+\tau)]^p}{p!} \cdot \\
& \cdot \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{z=0}^{\omega-\tau-\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{p=\infty} (v s_2)^z \frac{[c_2^x(c_2^{z+\tau+\frac{1}{2}} - c_2^{\tau+\frac{1}{2}})]^p}{p!} \operatorname{Log}^p g_1 \operatorname{Log}^p g_2 \\
& + \frac{v^{\frac{1}{2}}}{2} F s_2 \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{p=0}^{p=\infty} (v s_1)^{-(t-\tau)} \frac{[c_1^x(c_1^\tau - c_1^t) + TG^x(G^\tau - G^t) + f(x+\tau)]^p}{p!} \cdot \\
& \cdot \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{z=0}^{\omega-\tau-\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{p=\infty} (v s_2)^z \frac{[c_2^x(c_2^{z+\tau+\frac{1}{2}} + c_2^{\tau+1} - c_2^{\tau+\frac{1}{2}} - c_2^\tau)]^p}{p!} \operatorname{Log}^p g_1 \operatorname{Log}^p g_2
\end{aligned} \tag{240}$$

où s_1, c_1 et g_1 désignent les constantes de Makeham du taux instantané de mortalité $\mu_{x+\tau}^{aa}$, et s_2, c_2 et g_2 celles du taux $\mu_{x+\tau}$. En raison des très longs calculs à effectuer pour obtenir le développement en série et puis le développement limité, nous nous bornerons ici à faire remarquer que le développement lidstonien de la relation ci-dessus sera de la forme suivante:

$$\ddot{s}_x^{ai(x')} = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^x + \lambda_2(t)\, G^x + \lambda_3(t)\, x. \tag{241}$$

2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone

La réserve mathématique individuelle de cette assurance a pour expression:

$${}_tV_x = P \ddot{s}_{x:\overline{t}|}^{aa} - r \ddot{s}_x^{ai(x')}.$$

Les âges moyens se calculent selon les équations:

$$\bar{s}^{aa}_{\eta:\overline{t}|} \sum P = \sum P \bar{s}^{aa}_{x:\overline{t}|}$$

et

$$\bar{s}^{ai(x')}_{\xi} \sum r = \sum r \bar{s}^{ai(x')}_{x}.$$

Au moyen des développements lidstoniens (217) et (241), on obtient deux âges moyens sur les primes et trois, sur les rentes. On pourrait se contenter de l'emploi d'un seul âge moyen sur les primes et d'un seul âge moyen sur les rentes. On aura alors la formule de la réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés:

$$\sum {}_tV_x = \bar{s}^{aa}_{\eta:\overline{t}|} \sum P - \bar{s}^{ai(x')}_{\xi} \sum r. \tag{242}$$

IV. Rentes temporaires d'invalidité

1° Le développement de la valeur finale de la rente temporaire d'invalidité

Considérons une rente temporaire de 1, reposant sur la tête d'un actif d'âge x, payable en cas d'invalidité survenant avant l'âge-terme s, la première fois au début de l'invalidité au prorata du temps restant à courir jusqu'à la fin de l'année d'assurance en cours, puis au commencement de chaque année d'assurance jusqu'à l'âge-terme. La valeur finale des prestations, au moment t, est égale à:

$$\bar{s}^{ai}_{x:\overline{t}|} = v^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \frac{D^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x+t}} i^{(e)}_{x+\tau} \ddot{a}_{x+\tau+\frac{1}{2}:\overline{s-(x+\tau+\frac{1}{2})}|}. \tag{243}$$

Les fonctions analytiques du taux d'invalidité et de la rente temporaire nous permettent de l'écrire sous la forme:

$$\bar{s}^{ai}_{x:\overline{t}|} = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{2} \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \sum_{z=0}^{n-\tau-\frac{1}{2}} \frac{D^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x+t}} i^{(c)}_{x+\tau} (1+p_{x+\tau})\, v^z\, {}_zp_{x+\tau+\frac{1}{2}}. \tag{244}$$

Cette expression diffère de celle du cas précédent, formule (239), par le seul fait que la limite supérieur de la sommation $\sum_{z=0}^{\omega-\tau-\frac{1}{2}}$ est ici $[s-(x+\tau+\frac{1}{2})]$ et non pas $(\omega-\tau-\frac{1}{2})$. Son développement limité s'obtient donc à l'aide des mêmes expressions, mais en tenant compte de la nouvelle limite supérieure. On aura finalement:

$$\bar{s}^{ai}_{x:\overline{t}|} = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)\, c^x + \lambda_2(t)\, G^x + \lambda_3(t)\, x. \tag{245}$$

2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone

Voyons d'abord la formule de la réserve mathématique individuelle :

$$ {}_tV_x = P\,\bar{s}^{aa}_{x:\overline{t}|} - r\,\bar{s}^{ai}_{x:\overline{t}|}. $$

Dans le membre de droite, nous savons que le premier élément rétrospectif donne deux âges moyens, et le deuxième, trois. Pour chacun de ces éléments, on peut choisir un âge moyen unique. Nous avons alors pour un groupe d'assurés :

$$ \sum {}_tV_x = \bar{s}^{aa}_{\eta:\overline{t}|} \sum P - \bar{s}^{ai}_{\xi:\overline{t}|} \sum r, \qquad (246) $$

où η désigne l'âge moyen sur les primes et ξ l'âge moyen sur les rentes.

V. Assurances de rentes de veuves

1° Le développement de la valeur finale de la rente de veuves

Soit une rente de veuve de 1, reposant sur les têtes d'un couple dont le mari est âgé de x et la femme de y, payable pendant la durée du veuvage, la première fois au début de l'année d'assurance qui suit celle du décès du mari. La valeur finale, au moment t, de cette rente se calcule par la formule :

$$ \bar{s}^{w}_{x\,y:\overline{t}|} = \sum_{\tau=0}^{\tau=t-1} \frac{v^{x+\tau+1} l_{x+\tau} l_{y+\tau} q_{x+\tau}(1-q_{y+\tau})\, \ddot{a}^{ww}_{y+\tau+1}}{v^{x+t} l_{x+t} l_{y+t}}, \qquad (247) $$

dans laquelle il nous est impossible d'exprimer $\ddot{a}^{ww}_{y}$ sous une forme analytique et de donner à la valeur finale ci-dessus une expression susceptible de nous conduire à un développement limité, comme nous l'avons fait jusqu'ici. Du reste, la présence des âges moyens en x et en y rend le problème insoluble ; en effet, la nature des coefficients de Lidstone nous permettait de le prévoir.

2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone

L'impossibilité d'obtenir le développement limité de la valeur finale de la rente de veuve dans la formule rétrospective de la réserve mathématique :

$$ {}_tV_{x|y} = P\,\bar{s}^{aa}_{xy:\overline{t}|} - r\,\bar{s}^{w}_{x|y:\overline{t}|} $$

nous oblige à utiliser pour le groupe l'âge moyen relatif aux primes, calculé par le développement limité de la valeur finale de la rente d'activité sur deux têtes. Mathématiquement, la solution du problème s'avère impossible. L'adoption d'un seul âge moyen pourrait être pratiquement envisagée, cela avec une approximation plus ou moins satisfaisante.

Cette remarque s'étend également à toutes les catégories d'assurances de veuves.

VI. Considérations générales sur l'emploi de la méthode dérivée de celle de Lidstone

Les propriétés bien connues des lois de Makeham et de Behm-Urech nous ont permis d'étendre la méthode dérivée de celle de Lidstone aux assurances d'invalidité. Nous avons obtenu d'abord les développements lidstoniens des valeurs finales de la rente d'activité et du risque dans chaque cas; ensuite, nous avons calculé les âges moyens en admettant que les tables utilisées sont ajustées selon la loi de Makeham. Cependant, insistons sur le fait que, pour employer la méthode de Lidstone et sa méthode dérivée, les tables utilisées ne doivent pas nécessairement être ajustées d'après les deux lois en question.

Dans tous les cas, on trouve plus de deux âges moyens. Dans l'application, il faut déterminer d'une façon judicieuse l'âge moyen à utiliser.

Notre méthode dérivée ne s'applique pas aux assurances de veuves, vu l'impossibilité de trouver le développement limité de la valeur finale du risque basée sur deux têtes.

Chapitre IV

Application de la méthode «récurrence-risque» aux assurances d'invalidité et de survivants

Nous allons examiner dans ce dernier chapitre, l'application de la nouvelle méthode de récurrence fondée sur les capitaux sous le risque. Cette méthode nous permettra de passer des capitaux sous le risque de la $(t-1)^{e}$ année à ceux de la t^{e} année. Ensuite, on calculera les réserves mathématiques en déduisant les capitaux sous le risque des capitaux assurés. Ainsi, le calcul des réserves mathématiques s'effectuera d'une manière indirecte.

Les capitaux sous le risque varient, dans l'assurance mixte, en sens inverse des réserves mathématiques. Grâce à ce procédé, on peut connaître, à une époque quelconque t, non seulement les réserves mathématiques, mais aussi la somme des capitaux sous le risque, ce qui n'est pas sans intérêt pratique pour un actuariat.

Voyons maintenant l'application de notre nouvelle méthode aux assurances d'invalidité et de survivants.

I. Assurances temporaires de capitaux payables en cas de décès à l'état d'actif

Il s'agit de calculer la réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés actifs, de même âge x, ayant droit chacun à un capital C en cas de décès survenant avant l'âge-terme à l'état d'actif et payant chacun une prime annuelle P durant toute leur activité, au plus tard jusqu'à l'âge-terme.

Le capital sous le risque de la $(t-1)^{e}$ année, $u^{\frac{1}{2}} - {}_{t-1}V_x$, que l'on suppose connu, est lié à celui de la t^{e} année par la relation suivante:

$$C\,l^{aa}_{x+t-1}(u^{\frac{1}{2}} - {}_{t-1}V_x) = Cv\,l^{aa}_{x+t}(u^{\frac{1}{2}} - {}_{t}V_x) + C\,l^{aa}_{x+t-1}P - Cv^{\frac{1}{2}}d^{aa}_{x+t-1} + Cu^{\frac{1}{2}}l^{aa}_{x+t-1} - Cv^{\frac{1}{2}}l^{aa}_{x+t}, \qquad (248)$$

d'où nous tirons le capital sous le risque à la fin de la t^{e} année:

$$C(u^{\frac{1}{2}} - {}_{t}V_x) = C\frac{l^{aa}_{x+t-1}}{v\,l^{aa}_{x+t}}\left[(u^{\frac{1}{2}} - {}_{t-1}V_x) - P + \bar{A}^{aa}_{x+t-1:\overline{1}|} - u^{\frac{1}{2}}(1 - {}_{1}E^{aa}_{x+t-1})\right], \qquad (249)$$

ou bien, en posant ${}_tR_x = (u^{\frac{1}{2}} - {}_tV_x)$:

$$C\,{}_tR_x = C\,{}_1I^{aa}_{x+t-1}\left[{}_{t-1}R_x - P - u^{\frac{1}{2}}(1 - {}_1E^{aa}_{x+t-1}) + \bar{A}^{aa}_{1\,x+t-1:\overline{1}|}\right], \quad (250)$$

où:

$${}_1I^{aa}_{x+t-1} = \frac{D^{aa}_{x+t-1}}{D^{aa}_{x+t}}.$$

Cette formule ne s'applique cependant qu'aux contrats qui sont encore en vigueur à la fin de la t^e année. Pour ceux qui sortent du groupe pour quelle cause que ce soit, il faut calculer les capitaux sous le risque des contrats sortants et les déduire de ceux de l'exercice en cours. De même, il faut tenir séparément compte des polices souscrites dans l'année.

En vue du calcul par groupes, notre formule devient:

$$\sum C\,{}_tR_x = {}_1I^{aa}_{x+t-1}\left[\sum C\,{}_{t-1}R_x - \sum C(P+u^{\frac{1}{2}}) + {}_1E^{aa}_{x+t-1}\sum C u^{\frac{1}{2}} + \bar{A}^{aa}_{1\,x+t-1:\overline{1}|}\sum C\right]. \quad (251)$$

Ensuite, en retranchant simplement les capitaux sous le risque de la t^e année des capitaux assurés, nous aurons la réserve mathématique totale du groupe à la fin de la t^e année.

Si le capital payable en cas de décès est croissant avec les années de service, en progression arithmétique, la formule de la réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés est semblable à la formule (251):

$$\sum C\,{}_tR_x = {}_1I^{aa}_{x+t-1}\left[\sum C\,{}_{t-1}R_x - \sum\left(P + C(t-1)\,u^{\frac{1}{2}}\right) + {}_1E^{aa}_{x+t-1}\sum C u^{\frac{1}{2}} t + \bar{A}^{aa}_{1\,x+t-1:\overline{1}|}\sum (t-1)\,C\right]. \quad (252)$$

L'application de cette méthode de récurrence à la combinaison d'assurance envisagée est délicate; les opérations qu'elle comporte doivent être menées avec un soin particulier. Tout le mouvement produit au cours de chaque exercice doit être pris en considération.

II. Assurances temporaires de capitaux payables en cas d'invalidité

C'est le même problème que dans le cas précédent, sauf que le capital est ici payable à l'assuré en cas d'invalidité et non pas en cas de décès à l'état d'actif.

La relation suivante lie le capital sous le risque de la $(t-1)^{e}$ année à celui de la t^{e}:

$$Cl^{aa}_{x-t-1}(u^{\frac{1}{2}}-{}_{t}V_x) = Cvl^{aa}_{x+t}(u^{\frac{1}{2}}-{}_{t}V_x)+Cl^{aa}_{x-t-1}P-Cv^{\frac{1}{2}}J_{x+t-1}+Cu^{\frac{1}{2}}l^{aa}_{x+t-1}-Cv^{\frac{1}{2}}l^{aa}_{x+t}.$$

(253)

Nous aurons donc:

$$C(u^{\frac{1}{2}}-{}_{t}V_x) = \frac{l^{aa}_{x+t-1}}{vl^{aa}_{x-t}}\left[C(u^{\frac{1}{2}}-{}_{t-1}V_x)-P-Cu^{\frac{1}{2}}(1-{}_{1}E^{aa}_{x+t-1})+C\left[\bar{A}^{ai}_{1\,x+t-1:\overline{1}|}\right]\right].$$

(254)

Pour le calcul par groupes, notre formule se met sous la forme:

$$\sum C_t R_x = {}_{1}I^{aa}_{x-t-1}\left[\sum C_{t-1}R_x-\sum(P+Cu^{\frac{1}{2}})+{}_{1}E^{aa}_{x-t-1}\sum Cu^{\frac{1}{2}}+\left[\bar{A}^{ai}_{1\,x+t-1:\overline{1}|}\right]\sum C\right].$$

(255)

L'application pratique de cette formule présente des difficultés de même ordre que celles que l'on a signalées dans la combinaison précédente.

Si le capital assuré croît avec les années de service, la formule sera semblable à la formule (252).

III. Rentes viagères d'invalidité assurée temporairement

Cherchons la réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés d'âge x ayant droit chacun à une rente viagère r payable en cas d'invalidité survenant avant l'âge-terme, la première fois au début de l'invalidité au prorata du temps restant à courir jusqu'à la fin de l'année d'assurance en cours, puis au début de chaque année jusqu'au décès. Chaque assuré paie une prime annuelle P, tant qu'il est actif au plus jusqu'à l'âge-terme.

D'abord, écrivons la relation qui lie les capitaux sous le risque de deux années consécutives:

$$\begin{aligned} l^{aa}_{x+t-1}r(u^{\frac{1}{2}}\ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}}-{}_{t-1}V_x) = {} & l^{aa}_{x+t}vr(u^{\frac{1}{2}}\ddot{a}_{x+t+\frac{1}{2}}-{}_{t}V_x)+l^{aa}_{x+t-1}P \\ & -v^{\frac{1}{2}}rJ_{x+t-1}\ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}}+l^{aa}_{x+t-1}u^{\frac{1}{2}}r\ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}} \\ & -l^{aa}_{x+t}v^{\frac{1}{2}}r\ddot{a}_{x+t+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

(256)

où J_{x+t-1} est le nombre des actifs d'âge $(x+t-1)$ qui deviennent invalides dans leur $(x+t)^{e}$ année: $J_{x+t-1} = l^{aa}_{x+t-1}i^{(e)}_{x+t-1}$.

Le capital sous le risque de la t^e année sera donc:

$$ {}_tR_x = {}_1l^{aa}_{x+t-1}\left[{}_{t-1}R_x - P + v^{\frac{1}{2}} r\, i^{(e)}_{x+t-1}\, \ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}} r\, \ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}} r\, p^{aa}_{x+t-1}\, \ddot{a}_{x+t+\frac{1}{2}}\right] \tag{257} $$

où:

$$ {}_tR_x = r(u^{\frac{1}{2}} \ddot{a}_{x+t+\frac{1}{2}} - {}_tV_x). $$

Pour le calcul par groupes, nous pourrons écrire finalement:

$$ \underline{\sum}\, {}_tR_x = {}_1l^{aa}_{x+t-1}\left[\underline{\sum}\, {}_{t-1}R_x - \underline{\sum} P + \left(\ddot{a}^{aa(x+t)}_{x+t-1} - u^{\frac{1}{2}}(\ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}} - {}_1\ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}})\right) \underline{\sum} r\right]. \tag{258} $$

En cas de changement survenu dans le groupe au cours de l'exercice, il faut en tenir compte dans l'application de cette dernière formule. Pratiquement, on se trouve devant un problème présentant de sérieuses difficultés.

Une fois les capitaux sous le risque connus, on obtient la réserve mathematique totale de la manière habituelle.

Pour les rentes temporaires d'invalidité, on résout le problème en remplaçant dans les relations ci-dessus toutes les rentes viagères par les rentes temporaires d'âges-termes s.

IV. Assurances de rentes de veuves

Calculons la réserve mathématique totale d'un groupe d'assurés d'actifs d'âge x, chacun marié à une femme d'âge y ayant droit à une rente de veuve r payable pendant toute la durée de veuvage, la première fois au commencement de l'année d'assurance qui suit celle du décès du mari. Le mari paie une prime annuelle P tant qu'il est marié et actif, au plus jusqu'à l'âge-terme.

Etablissons d'abord la relation existant entre le capital sous le risque de cette assurance, de la $(t-1)^e$ année, et celui de la t^e année:

$$ \begin{aligned} l^{aa}_{x+t-1} l_{y+t-1}\, r(\ddot{a}^{wow}_{y+t-1} - {}_{t-1}V_{xy}) = {} & l^{aa}_{x+t}\, l_{y+t}\, v\, r(\ddot{a}^{wow}_{y+t} - {}_tV_{xy}) + l^{aa}_{x+t-1} l_{y+t-1} P \\ & - l^{aa}_{x+t}\, l_{y+t}\, v\, r\, \ddot{a}^{wow}_{y+t} - r\, \ddot{a}^{wow}_{y+t}\, v\, l_{y+t-1} d^{aa}_{x+t-1} \\ & + l^{aa}_{x+t-1} l_{y+t-1}\, r\, \ddot{a}^{wow}_{y+t-1}. \end{aligned} \tag{259} $$

Posons ${}_tR_{x\,y} = r({}^{vw}\ddot{a}_{y+t} - {}_tV_{x\,y})$, et tirons de notre dernière formule le capital sous le risque de la t^e année:

$${}_tR_{x\,y} = {}_1I^{aa}_{x+t-1:y+t-1}\Big[{}_{t-1}R_{x\,y} - P + r\,{}_1E^{aa}_{x+t-1:y+t-1}\,{}^{vw}\ddot{a}_{y+t} - r\,{}^{vw}\ddot{a}_{y+t-1} + r\,{}^{vw}\ddot{a}_{y+t}\,\bar{A}^{aa}_{1\;x+t-1:\overline{1}|}\Big]. \quad (260)$$

L'emploi pratique de cette formule peut être facilité par l'introduction de l'âge moyen y_x des femmes. Le capital sous le risque total d'un groupe d'assurés sera alors donné par la formule:

$$\sum {}_tR_{x\,y_x} = {}_1I^{aa}_{x'-1:y'_x-1}\Big[\sum {}_{t-1}R_{x\,y_x} - \sum P + {}_1E^{aa}_{x'-1:y'_x-1}\,{}^{vw}\ddot{a}_{y'_x}\sum r - {}^{vw}\ddot{a}_{y'_x}\sum r + {}^{vw}\ddot{a}_{y'_x}\,\bar{A}^{aa}_{1\;x'-1:\overline{1}|}\sum r\Big]. \quad (261)$$

Ensuite, on calcule la réserve mathématique totale selon la relation entre le capital sous le risque et la réserve mathématique.

L'introduction de l'âge moyen des femmes conduit à des résultats qui ne sont qu'approximatifs. Elle ne facilite du reste pas beaucoup l'utilisation pratique de cette méthode de récurrence, qui reste toujours trop compliquée dans toutes les assurances d'invalidité et de survivants.

V. Considérations générales sur l'emploi de la méthode «récurrence-risque»

L'application de la méthode «récurrence-risque» est générale et présente une complication certaine dans toutes les combinaisons examinées. Nous avons pu trouver presque dans chaque cas une solution théorique du problème. Il convient de faire remarquer que l'application pratique de cette méthode de récurrence ne semble pas offrir d'avantage sur la méthode individuelle en raison de la multitude des éléments à calculer. De plus, les formules que nous avons établies ne s'appliquent pas aux polices entrées ou sorties pendant l'année. Il faut considérer ces dernières à part. Or, la fréquence des souscriptions, des transformations et des annulations vient compliquer considérablement le calcul des capitaux sous le risque, et partant, des réserves mathématiques. De ce fait, l'intérêt pratique devient illusoire.

Dans les assurances de veuves, l'introduction de l'âge moyen y_x pour les femmes introduit une incertitude dans les calculs. Les erreurs

commises dès le début peuvent croître avec les années. Il est difficile de connaître le degré d'approximation obtenu.

Dans l'assurance sur la vie, les formules élaborées sont beaucoup plus simples et d'une application plus facile que dans les assurances d'invalidité et de survivants.

En vue d'éviter que des erreurs éventuelles se reportent d'année en année, on peut envisager, comme dans la méthode de Fouret, de combiner la méthode de récurrence avec la méthode individuelle. On calculera alors, tous les 5 ans par exemple, les réserves mathématiques par la méthode individuelle et, entre temps, par la méthode «récurrence-risque».

CONCLUSION

La correspondance définie au début de ce travail nous a permis, en partant des méthodes principales de groupement pour le calcul des réserves mathématiques, d'établir les méthodes dérivées. Nous avons constaté que les propriétés de chaque méthode principale ont leurs correspondantes dans la méthode dérivée. La méthode dérivée et la méthode principale s'appliquent, d'une façon générale, aux mêmes combinaisons d'assurances. Nous avons pu mettre ainsi en évidence les caractéristiques de toutes les méthodes étudiées. Nous avons de plus généralisé les méthodes d'Altenburger et de Whiting. Cette généralisation des méthodes principales nous a aidé à mieux faire saisir la correspondance entre les méthodes principales et leurs méthodes dérivées.

Dans le cas de la méthode de Lidstone, la correspondance nous a conduit à une méthode dérivée qui n'est autre que la méthode «*t*», déjà connue. Nous l'avons traitée dans le cadre de notre définition de la correspondance «prospectif-rétrospectif» et montré les propriétés des deux méthodes.

D'autre part, nous avons indiqué une nouvelle méthode de récurrence basée sur les capitaux sous le risque, qui permet le calcul des réserves mathématiques par groupes.

L'application des méthodes dérivées de celles d'Altenburger et de Whiting à l'assurance sur la vie et à l'assurance contre l'invalidité ne présente en général aucune difficulté. Par contre, dans les assurances de veuves, l'application de ces méthodes dérivées n'est acceptable qu'en introduisant l'âge moyen des femmes.

La méthode dérivée de celle de Lidstone n'est qu'approximative, comme celle de Lidstone elle-même, puisque les développements limités des éléments rétrospectifs ne sont qu'approchés. Pour les besoins de la pratique, l'approximation obtenue est satisfaisante. L'application n'a pas rencontré de difficulté dans l'assurance sur la vie. En revanche,

on a constaté quelques difficultés relativement importantes dans les assurances d'invalidité et de veuves.

En ce qui concerne la nouvelle méthode de récurrence basée sur les capitaux sous le risque, c'est dans l'assurance sur la vie seulement que nous n'avons pas eu de difficultés appréciables. Dans les autres assurances, son utilisation pratique s'est avérée trop compliquée. Néanmoins, grâce à elle, tout problème posé a trouvé sa solution théorique.

En conclusion, nous estimons que l'application pratique des méthodes dérivées que nous avons obtenues ne rencontre aucune difficulté sérieuse et qu'elle est aussi aisée et commode que celle des méthodes principales. Le fait que la plupart de ces méthodes reposent sur la formule rétrospective de la réserve mathématique ne modifie en rien cette appréciation.

Il est clair que la tendance vers l'emploi généralisé des machines électroniques dans les actuariats enlèvera de l'importance à l'étude des méthodes de groupement. Nous ne pensons cependant pas qu'on pourra se dispenser complètement de les connaître, car il est probable qu'on continuera à grouper les polices d'une manière ou d'une autre, peut-être de manières différentes de celles qu'on utilise aujourd'hui.

BIBLIOGRAPHIE

Berger, A.: Zur Begründung von Lidstones Z-Methode. (Blätter für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete 1, 8, 1930).

Dasen, E.: Extension des méthodes de Lidstone, Altenburger et Fouret au calcul par groupes des réserves mathématiques dans l'assurance vie, invalidité et survivants (Stæmpfli & Cie, Berne 1936).

Galbrun, H.: Assurances sur la vie. Calcul des réserves (Gauthier-Villars, Paris 1927).

Gauthier, M.: Quelques remarques sur la méthode de Lidstone (Bulletin de l'Institut des Actuaires français, tome 27, 1920).

Fouret, J.: Calcul des réserves mathématiques (Bulletin de l'Institut des Actuaires français, avril 1891).

Jecklin, H.: Zur Praxis der Reserveberechnung nach der *t*-Methode (Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, vol.42, livre 1, 1942).

Jecklin, H.: Grundsätzliche Bemerkungen zur *t*-Methode (Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, vol.49, livre 2, 1949).

Jéquier, Ch.: De la capitalisation viagere («La Concorde», Lausanne 1949).

Jéquier, Ch.: L'assurance à terme fixe et les combinaisons usuelles («La Concorde», Lausanne 1942).

Jörgensen, N.R.: Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung (Verlag von Fischer, Jena 1913).

Maingie, L.: La théorie des opérations viageres (L'Ancienne Librairie «Castaigne», Bruxelles 1922).

Maurer, W. und *Boss, M.:* Eine verfeinerte *t*-Methode (Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, vol.54, livre 1, 1954).

Maurice, H.: Les opérations financieres et les opérations viageres (Les Editions comptables, commerciales et financieres, Bruxelles 1957).

Podtiaguine, J.: Quelques remarques sur la méthode de Lidstone dans l'assurance sur la vie (Aktuarshé Védy, Vol.VII, 1937/38).

Richard, P.-J.: Théorie et pratique des opérations d'assurances (Doin & Cie, Paris 1944).

Ruch, H.: Eine Variation der *t*-Methode (Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, vol.48, livre 2, 1948, et vol.49, livre 2, 1949).

Urech, A.: Sur les bases techniques de l'assurance collective (Stæmpfli & Cie, Berne 1930).

Zwinggi, E.: Versicherungsmathematik (Verlag Birkhäuser, Basel 1945).

Zwinggi, E.: Bemerkungen zur Reserveberechnung nach der *t*-Methode (Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, vol.42, livre 2, 1942).

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 9

Première partie

Définition de la correspondance «prospectif-rétrospectif»

I. La notion de la réserve mathématique 11
1° Définition générale 11
2° La formule prospective de la réserve mathématique 13
3° La formule rétrospective de la réserve mathématique 14

II. Correspondance «prospectif-rétrospectif» déduite des formules prospective et rétrospective 15
1° Définition de la correspondance 15
2° Etude de quelques éléments correspondants. Exemples numériques 17

Deuxième partie

Recherche des méthodes dérivées et leurs applications à l'assurance sur la vie

Chapitre I. Recherche de la méthode dérivée de la méthode d'Altenburger. . 22

I. La méthode d'Altenburger 22
1° Assurances mixtes. 22
2° Assurances vie-entière 23
3° Assurances temporaires au décès 24
4° Assurances de capitaux différés 24
5° Assurances à terme fixe en cours 25
6° Assurances de rentes différées à primes annuelles 26
7° Assurances mixtes sur deux têtes au premier décès 26
8° Méthode d'Altenburger à primes d'inventaire 28

II. La méthode dérivée de la méthode d'Altenburger ou méthode *U* . . . 29
1° Assurances mixtes. 29
2° Assurances de capitaux différés 34
3° Assurances à terme fixe en cours 38
4° Assurances mixtes sur deux têtes au premier décès 40

III. La méthode d'Altenburger généralisée 41
1° Assurances mixtes. 42
2° Assurances vie-entière 43
3° Assurances temporaires au décès 44
4° Assurances de capitaux différés 45
5° Assurances à terme fixe en cours 47
6° Assurances de rentes différées à primes annuelles 47

IV. Symétrie de la méthode U et de la méthode d'Altenburger généralisée 48

V. Critique de la méthode d'Altenburger et de la méthode U 51

Chapitre II. Recherche de la méthode dérivée de la méthode de Whiting . . 55

I. La méthode de Whiting 55
1° Assurances mixtes. 55
2° Assurances de capitaux différés sans contre-assurance 57

II. La méthode dérivée de la méthode de Whiting ou méthode $U^{(w)}$ . . . 58
1° Assurances mixtes. 58
2° Assurances de capitaux différés sans contre-assurance 60

III. Critique de la méthode de Whiting et de la méthode $U^{(w)}$ 62

Chapitre III. Recherche de la méthode dérivée de la méthode de Lidstone . 63

I. La méthode de Lidstone 63
1° Assurances mixtes. 64
2° Assurances temporaires au décès 66
3° Assurances de capitaux différés 67
4° Assurances à terme fixe en cours 69
5° Assurances de rentes différées à primes annuelles 69

II. La méthode dérivée de la méthode de Lidstone 71
1° Assurances mixtes 72
2° Assurances de capitaux différés 76
3° Assurances à terme fixe en cours 78

III. Critique de la méthode de Lidstone et de sa méthode dérivée 80

Chapitre IV. Recherche de la méthode dérivée de la méthode «t» 83

I. La méthode «t» 83

II. La méthode dérivée de la méthode «t» 85

III. Critique de la méthode «t» 85

Chapitre V. Recherche de la méthode dérivée de la méthode de Fouret . . . 87

I. La méthode de Fouret 87
1° Assurances mixtes. 87
2° Assurances de capitaux différés 88
3° Assurances à terme fixe en cours 89

II. La méthode dérivée de la méthode de Fouret 89

III. Une nouvelle méthode: La méthode «récurrence-risque». 91
1° Assurances mixtes 91
2° Assurances de capitaux différés sans contre-assurance 93
3° Assurances à terme fixe en cours 93

IV. Critique de la méthode de Fouret et de la méthode «récurrence-risque» 95

Considérations générales sur la deuxième partie 96

Troisième partie

Application des méthodes dérivées aux assurances d'invalidité et de survivants

Chapitre I. Application de la méthode U aux assurances d'invalidité et de survivants 100

I. Assurances temporaires de capitaux payables en cas de décès à l'état d'actif 100

II. Assurances temporaires de capitaux payables en cas d'invalidité . . . 102

III. Rentes viagères d'invalidité assurées temporairement 103

IV. Rentes temporaires d'invalidité 105

V. Assurances de rentes de veuves 106

VI. Assurances de capitaux de survie payables aux veuves des actifs . . . 108

VII. Assurances de capitaux de survie payables aux veuves des invalides . 109

VIII. Considérations générales sur l'emploi de la méthode U 110

Chapitre II. Application de la méthode $U^{(w)}$ aux assurances d'invalidité et de survivants 111

I. Assurances temporaires de capitaux payables en cas de décès à l'état d'actif 111

II. Assurances temporaires de capitaux payables en cas d'invalidité . . . 112

III. Assurances de capitaux de survie payables aux veuves des actifs . . . 113

IV. Assurances de capitaux de survie payables aux veuves des invalides . 113

V. Considérations générales sur l'emploi de la méthode $U^{(w)}$ 114

Chapitre III. Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone aux assurances d'invalidité et de survivants 115

I. Assurances temporaires de capitaux payables en cas de décès à l'état d'actif 115
1° Les développements limités de quelques éléments rétrospectifs . . 115
2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone. 120

II. Assurances temporaires de capitaux payables en cas d'invalidité . . . 122
1° Les développements limités de quelques éléments rétrospectifs . . 122
2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone. 124

III. Rentes viagères d'invalidité assurée temporairement 125
1° Le développement de la valeur finale de la rente temporaire assurée temporairement 125
2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone. 125

IV. Rentes temporaires d'invalidité 126
1° Le développement de la valeur finale de la rente temporaire d'invalidité 126
2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone. 127

V. Assurances de rentes de veuves 127
1° Le développement de la valeur finale de la rente de veuves 127
2° Application de la méthode dérivée de celle de Lidstone. 127

VI. Considérations générales sur l'emploi de la méthode dérivée de celle de Lidstone 128

Chapitre IV. Application de la méthode «récurrence-risque» aux assurances d'invalidité et de survivants. 129

I. Assurances temporaires de capitaux payables en cas de décès à l'état d'actif 129

II. Assurances temporaires de capitaux payables en cas d'invalidité . . . 130

III. Rentes viagères d'invalidité assurée temporairement 131

IV. Assurances de rentes de veuves 132

V. Considérations générales sur l'emploi de la méthode «récurrence-risque» 133

Conclusion 135

Bibliographie 137